共立講座 21世紀の数学

4

距離空間と位相構造

矢野 公一・著

共立出版株式会社

刊行にあたって

基礎科学としての数学の重要性は近年ますます増えている．にもかかわらず理工系離れがすすんでいる．その根底には数学離れがある．高等学校の数学教育も新課程に移行し，大学における数学教育も多様化しつつある．

このような状況において渇望されているのは，多様なニーズにこたえる個性的な教科書である．われわれは，現在の数学体系を大胆に再構成した大学の教科書を模索した．旧来の理学部数学科が変貌しつつある現在，有機的なつながりのなかでこそ，多面的な理解や多様な目的にあわせた自由な選択が可能になると信ずる．

きたるべき時代 21 世紀へ向けて，この新しい構成の教科書「共立講座 21 世紀の数学」を世に問う．

編集委員

まえがき

本書は距離空間に重点をおいた一般位相の入門書である．一般の空間において収束あるいは連続の概念を確定させるための構造が位相であり，その理論は現代数学に必要欠くべからざる柱の一つである．位相はそれ自体として定義される場合もあるが，ユークリッド空間のように距離を経由して定まっているものも多い．しかも応用上重要な多くの空間は距離が与えられているか，あるいは少なくともその位相を適当な距離関数によって実現することができる．したがって特に距離空間に例をとって位相を論ずることには意味があろう．距離空間においては，具体的に距離関数の値として近さが表現されていること，また初歩の解析で親しんでいる数列の直接の一般化である点列が連続性を表すのに有効に使われるなど，直感的理解の上で助けとなる点が多い．しかしながら距離によって与えられる位相ではあっても，距離関数や点列を用いてすべてを記述することが，必ずしも内容の理解と理論の応用のために最善であるわけではない．これらの後ろに本質が隠され，また議論が冗長となる可能性があるからである．一方，位相空間の一般論は，抽象的でイメージがつかみにくいという難点があるにせよ十分に洗練されており，ある程度の訓練の後には本質の把握と議論の短縮化に多いに役立つものである．このような本質的な短縮化を経て初めて導入される概念があることも忘れてはならない．本書ではこのような立場から，題材としてはおもに距離空間を扱うが，議論に際しては一般位相の枠組みを多く用いる．また概念をよく理解するためには，空間の具体例が欠かせないが，このとき予備知識の枠にとらわれると，扱うことのできる空間が人為的なものに偏ってしまうおそれがある．したがってある程度の知識を仮定して初めてよく理解できる空間について

も, あえて取り上げるようにした. 初歩の解析学, 線形代数学はともかくとして, 複素関数論, ルベーグ積分論, 多様体論などがこれに当たる. このような例, あるいはやや専門的な例, 命題, 項, 節には * 印をつけておいた. 適宜選択していただきたい. 最初に位相を学ぶ際には, これらを飛ばして, 早く全体を把握することをお薦めする.

構成は以下の通りである. 第 1 章では距離空間を扱う. この章で形成された空間および写像のイメージが, 以降を読み進める上で重要な要因となるであろうから, なるべく多くの例を挙げて, 後の理解の助けとなることを期待した. 第 2 章は一般の空間に対する位相の定式化に当てられる. 距離空間の章との重複が多いが, その範疇では扱えない商位相空間について多く述べたつもりである. 第 3 章では分離公理と距離化定理を扱う. おもな目的はハウスドルフ性の解説と, 位相が距離によって与えられるための十分条件を述べることである. 第 4 章, 第 5 章では, 位相空間に対する概念のうちハウスドルフ性と並んで最も重要である, コンパクト性および連結性について解説した. 閉区間上の連続関数について最大値の定理と中間値の定理が成り立つことはよく知られているが, これは実数の閉区間がそれぞれコンパクト, 連結であることによるものである. この二つの概念を自由に扱うことができるようになれば, 一般位相を理解したといってよいであろう. 第 6 章では再び対象を距離空間に限って, 完備性について述べる. 完備性は空間上の点列に対してコーシーの収束判定法が成り立つことを保証する概念であって, 応用上重要なほとんどの距離空間はこの性質をもつ. 最後に集合論と実数論および二, 三の不等式についてまとめた付録を設けた. 順序からいえば集合論の準備を整え, かつ実数論を展開して, その後に位相空間を論ずるべきであろうが, 本来の対象に早く接する方が読みやすいと考えたためである. 本文を読み進む上で必要となった場合に利用していただきたい. 位相空間の概念のうち専門的なもの, 例えばネット, フィルター, 一様構造などについては触れていない. それ以外にも割愛した話題は多いので, 詳しい知識が必要な読者は巻末の文献などを参照されたい.

最後に, 草稿に関して貴重な意見を頂いた東京大学数理科学研究科の伊藤賢一君と, 著者のわがままを快く聞いてくださった共立出版 (株) の赤城圭さんに, この場を借りて感謝の言葉を申し上げる.

目　　次

1.　距 離 空 間　1

1.1　距　　離 2

1.1.1　距離関数 2

1.1.2　点列の収束 10

1.1.3　関数と写像の連続性 13

1.2　部分空間と直積空間 25

1.2.1　部分空間 25

1.2.2　直積空間 29

1.2.3　可算直積空間 33

1.3　位　　相 37

1.3.1　近傍 37

1.3.2　開集合 40

1.3.3　閉集合 42

1.3.4　内部, 閉包, 境界 44

1.3.5　孤立点, 集積点, 稠密性 47

章 末 問 題 53

2.　位 相 空 間　55

2.1　位 相 構 造 55

2.1.1　位相 56

2.1.2　連続性 62

2.1.3　基本近傍系 64

2.1.4 位相の基と準基 67
2.2 相対位相と直積位相 72
2.2.1 相対位相 72
2.2.2 直積位相 76
2.2.3 位相の強弱 80
2.2.4 誘導位相 80
2.3 商 位 相 84
2.3.1 和空間 84
2.3.2 商空間 86
2.3.3 商空間の例 89
2.3.4* 群の作用とその商空間 96
2.3.5* 準距離空間 99
章 末 問 題 102

3. 分離公理と距離化定理 105

3.1 分 離 公 理 105
3.1.1 距離空間における分離公理 106
3.1.2* 位相空間における分離公理 109
3.2* 距離化定理 115
3.2.1 連続関数の構成 115
3.2.2 距離化定理 118
章 末 問 題 121

4. コンパクト空間 122

4.1 コンパクト性 122
4.1.1 コンパクト空間 123
4.1.2 点列コンパクト性 126
4.1.3 コンパクト性の遺伝 131
4.1.4 ハウスドルフ空間におけるコンパクト性 138
4.2* 局所コンパクト性とパラコンパクト性 145

4.2.1　局所コンパクト空間 145
4.2.2　パラコンパクト空間 150
4.3*　位相空間のコンパクト化 155
4.3.1　コンパクト化の例 156
4.3.2　一点コンパクト化 158
4.3.3　ストーン-チェックのコンパクト化 161
章 末 問 題 163

5.　連結性と単連結性　165

5.1　連　結　性 165
5.1.1　連結空間 165
5.1.2　連結性の遺伝 168
5.1.3　連結成分 171
5.1.4　弧状連結空間 174
5.2*　単 連 結 性 179
章 末 問 題 186

6.　完備距離空間　187

6.1　完　備　性 187
6.1.1　コーシー列 187
6.1.2*　完備化 191
6.1.3　コンパクト性と完備性 195
6.1.4　完備性の応用 197
6.2　関 数 空 間 201
6.2.1　バナッハ空間 201
6.2.2　連続関数の空間 203
6.2.3*　広義一様収束とコンパクト開位相 207
6.2.4*　近似定理 209
6.2.5*　特異な関数と曲線 212
章 末 問 題 217

付録 集合, 実数, 不等式 **219**
A.1 集 合 219
A.1.1 集合 219
A.1.2 写像 223
A.1.3 集合族と選択公理 226
A.1.4 順序とツォルンの補題 228
A.1.5 同値関係と商集合 230
A.1.6 濃度 232
A.2 実 数 235
A.2.1 自然数 235
A.2.2 整数と有理数 238
A.2.3 実数 239
A.2.4 数列 241
A.2.5 級数 245
A.3 いくつかの不等式 246
A.3.1 シュワルツの不等式 246
A.3.2 ヘルダーの不等式 248

章末問題解答 **252**
参 考 文 献 **274**
索 引 **276**

1

距離空間

空間に近さを定義し，それによって収束あるいは連続性を記述する概念が位相である．一般の位相空間においてはこの近さは近傍あるいは開集合を用いて記述されるが，距離空間においては近さを測る共通の尺度として距離関数が与えられている．逆にいえば距離空間とは，近さが具体的に数値によって表された空間のことである．まえがきでも述べたように，距離空間は位相空間の一種ではあるが，位相空間の基本例のほとんどは距離空間であり，また一般位相における重要な概念の多くはその原型を距離空間に求めることができる．この章の目的は，距離空間とその上での連続性の定義を与えること，具体的な距離空間を多く例示すること，近傍，開集合など一般位相の基本的概念を距離空間の場合に解説することにある．

さて平面を考えれば，二点間の距離が，その二点を結ぶ線分の長さとして定義されている．平面上のこの距離に関して最初に学ぶことは，三角形の二辺の長さの和は他の一辺の長さよりも大きいという事実であろう (図 1.1)．これを三角不等式と呼ぶが，一般の空間に対する距離関数の定義はこの不等式を出発点としている．

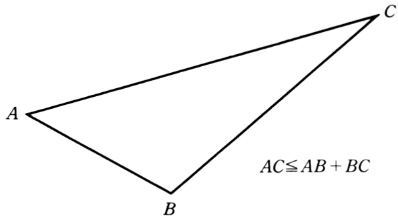


図 1.1　三角不等式

1.1　距　　離

この節では距離空間を定義し, その位相を点列の収束を基本として記述する. 距離の概念は, 一般の位相空間における近傍あるいは開集合に比べて直感的に理解しやすく, また点列による連続性の記述は実数空間, ユークリッド空間との類推も容易である.

1.1.1　距離関数

一般に位相の定まった集合を**空間**, その元を**点**と呼ぶが, これから位相を定めようとする場合にもこれらの言葉を流用することが多い. ここでもその慣例に従って "空間" から始めることとする.

空間 X と自分自身との直積 $X \times X$ 上の実数値関数 $d: X \times X \to \boldsymbol{R}$ が以下の三条件を満たすとき, この d を空間 X 上の**距離関数**あるいは**距離**といい, 対 (X, d) を**距離空間** と呼ぶ. 距離関数について特に言及する必要がないときには, 単に距離空間 X という.

(D$_1$)　$d(x,y) \geq 0$.
　　また $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のとき, そのときに限る.

(D$_2$)　$d(x,y) = d(y,x)$.

(D$_3$)　$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

この三条件を**距離の公理**, (D$_1$) を正値性, (D$_2$) を対称律, (D$_3$) を**三角不等式** と呼ぶ. 空間 X 上の距離関数を定義することを X に**距離を入れる**, あるいは**距離を定める**という. また値 $d(x,y)$ を二点 $x, y \in X$ の間の**距離**という. 三角不等式は, それと同値な

(D$'_3$)　$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$

の形で使われることも多い.

以下でいくつかの距離空間の例を挙げるが, 最初は抽象的な空間である.

ユークリッド: Euclid=Eukleides, 330?-275?B.C.

■ 例 1.1 ■ 離散距離空間

X を任意の集合とし, 直積集合 $X\times X$ 上の関数 d を

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \text{ のとき} \\ 1, & x\neq y \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義すると, この d は X 上の距離を与える. 距離の公理のうち, 正値性 (D_1) と対称律 (D_2) を d が満たすことは明らかである. 三角不等式 (D_3) は, $x=z$ の場合は $d(x,y)\geq 0$, $d(y,z)\geq 0$ より成立し, $x\neq z$ の場合は $x\neq y$ あるいは $y\neq z$ が成り立つことから $d(x,z)=1\leq d(x,y)+d(y,z)$ となって, やはり成立する. こうして得られた距離空間 (X,d) を**離散距離空間**あるいは**離散空間**, 距離 d を**離散距離**と呼ぶ. 異なる二点 $x\neq y$ に対する値 1 には特別の意味はなく, 他の正の数に置き換えても本質は変わらない. 例えば一辺の長さが 1 の正三角形の頂点の全体からなる集合, 一辺の長さが 1 の正四面体の頂点の全体からなる集合の自然な距離はここで与えた離散距離と等しい. 集合 X の元の数がさらに多い場合, 例えば無限離散空間を直感的にとらえることは難しいが, 距離空間になっていること自体は上の議論によって了解されるであろう. 数学的対象に対してイメージをもつことは理解を深める上では欠かせないが, 定義に戻って論理の上だけで確かめることもまた重要である. □

■ 例 1.2 ■ 実数空間 $\boldsymbol{R}$ と複素数空間 $\boldsymbol{C}$

実数全体のなす集合 $\boldsymbol{R}$, 複素数全体のなす集合 $\boldsymbol{C}$ は, ともに $d(x,y)=|x-y|$ によって距離空間となる. 実数空間においてこの d が距離の公理を満たすことは絶対値に関する三角不等式による (命題 A.13, p.241). また複素数空間 $\boldsymbol{C}$ は, 元 $z=x+y\sqrt{-1}$ を実部 x と虚部 y の対 (x,y) と見なすことによって実数空間の直積 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2$ と同一視されるが, このとき d は次に述べるユークリッドの距離と等しい. 断らない限り, 実数空間 $\boldsymbol{R}$ と 複素数空間 $\boldsymbol{C}$ にはこの距離が入っている. 実数空間 $\boldsymbol{R}$ を**実直線**, 複素数空間 $\boldsymbol{C}$ を**複素平面**と呼ぶこともある. □

■ 例 1.3 ■ n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$

$\boldsymbol{R}^n$ を実数空間 $\boldsymbol{R}$ の n 個の直積 $\overbrace{\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}}^{n}$ とし, その二点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ に対して**ユークリッドの距離**を

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

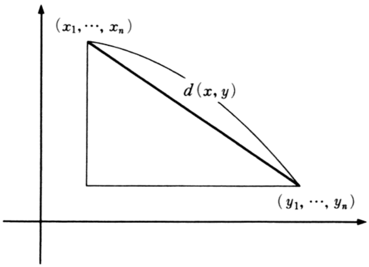


図 1.2 ユークリッド空間

で定める(図1.2). この距離を入れた $\boldsymbol{R}^n$ を **n次元ユークリッド空間**といい, E^n あるいはもとと同じ記号の $\boldsymbol{R}^n$ で表す. ただし $\| \ \|$ は**ユークリッドのノルム**

$$\|u\| \ = \ \sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}$$

である. d が三角不等式を満たすことはユークリッドのノルム $\| \ \|$ の性質

$$\|x+y\| \ \leq \ \|x\|+\|y\|$$

によって示されるが,

$$(\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 \ = \ 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} - \sum_{i=1}^n x_i y_i\right)$$

であるから, これはよく知られたコーシー-シュワルツの不等式 (p.246)

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

に帰着される. $\boldsymbol{R}^n$ 上ではユークリッドの距離が最も一般的ではあるが, 他にも

$$d_1(x,y) \ = \ \|x-y\|_1 \ = \ |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|$$

$$d_\infty(x,y) \ = \ \|x-y\|_\infty \ = \ \sup\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\}$$

によって距離を入れることもある. この d_1, d_∞ が三角不等式を満たすことは, 絶対値 $| \ |$ についての三角不等式を用いて次のように示される.

$$\sum_i |x_i-z_i| \ \leq \ \sum_i (|x_i-y_i|+|y_i-z_i|) \ = \ \sum_i |x_i-y_i| + \sum_i |y_i-z_i|$$

コーシー: Augustin Louis Cauchy, 1789-1857.
シュワルツ: Jacob Theodore Schwartz, 1930-.

$$\sup_i |x_i - z_i| \le \sup_i (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \le \sup_i |x_i - y_i| + \sup_i |y_i - z_i|$$

複素 $\boldsymbol{n}$ 次元空間 $\boldsymbol{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n);\ z_i \in \boldsymbol{C}\}$ は, 複素数空間 $\boldsymbol{C}$ の場合と同じく $z_i = x_i + y_i\sqrt{-1} \in \boldsymbol{C}$ を $(x_i, y_i) \in \boldsymbol{R}^2$ と見なすことにより $\boldsymbol{R}^{2n}$ と同一視して, そのユークリッドの距離を考える. 具体的には

$$d(z, z') = \|z - z'\| = \sqrt{|z_1 - z_1'|^2 + \cdots + |z_n - z_n'|^2}\ .$$

この距離を与えた $\boldsymbol{C}^n$ を **$\boldsymbol{n}$ 次元ユニタリ空間**とも呼ぶ. □

一般に実数 $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間 V において, 各元 $v \in V$ に対して実数 $\|v\|$ が定義され, 以下の条件が満たされるとき, これを V 上の**ノルム**という.

(N$_1$)　$\|v\| \ge 0$.
　　また $\|v\| = 0$ となるのは $v = 0$ のとき, そのときに限る.

(N$_2$)　$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$, ただし λ は実数.

(N$_3$)　$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$.

ノルムが与えられた線形空間 $(V, \|\ \|)$ を **ノルム空間**という. ノルム空間は, 断らない限り

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定義される距離によって距離空間と見なされる. 公理 (N$_1$) より $d(x, y) \ge 0$ であって, 等号成立は $x - y = 0$, すなわち $x = y$ のとき, そのときに限る. また (N$_2$) より $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$. 最後に (N$_3$) によって $d(x, z) = \|x - z\| \le \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$. すなわちこの d は距離の公理を満たす. 条件 (N$_3$) をノルムに関する**三角不等式**と呼ぶ. 例 1.3 で述べた $\boldsymbol{R}^n$ の距離 d_1, d_∞ は, おのおの $\boldsymbol{R}^n$ のノルム $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$ からこのようにして定義されたものであった. $\|\ \|_1$ およびユークリッドのノルム $\|\ \|$ は **$\boldsymbol{p}$ 次ノルム**

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

の, それぞれ $p = 1$, $p = 2$ の場合である. また $\|\ \|_\infty$ は上の式そのものではないが, $p \to \infty$ として極限をとった

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \sup\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$$

がその定義であり，これも p 次ノルムの一種であると考える．一般の p 次ノルム $\| \ \|_p$ に関する三角不等式，いわゆるミンコウスキの不等式については付録を参照されたい (p.250)．

■ 例 1.4 ■ 連続関数のなす空間 $C[0,1]$

$C[0,1]$ で閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす空間を表すこととする．$f \in C[0,1]$ に対し

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(t)|dt \\ \|f\|_\infty &= \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)| \end{aligned}$$

と定義すると，有限次元のユークリッド空間の場合と同様，これらはノルムであり，$d_1(f,g) = \|f-g\|_1$, $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$ はともに $C[0,1]$ の距離を与える．ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の場合と同じく，$\| \ \|_1$ は **p 次ノルム**

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

の $p=1$ の場合であり，$\| \ \|_\infty$ は $p \to \infty$ に対する極限と一致する．後者の $\| \ \|_\infty$ を**一様ノルム**ともいう．積分に関するミンコウスキの不等式の証明は付録に譲る (p.250)．□

■ 例 1.5 ■ 数列空間 ℓ^2

数列空間 ℓ^2 を

$$\ell^2 = \{ x = (x_n)_{n=1,2,\cdots} \ ; \ x_n \in \boldsymbol{R}, \ \sum |x_n|^2 < \infty \}$$

で定義する．この ℓ^2 は $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対し，加法を $x+y=(x_n+y_n)$ によって，スカラー倍を $\alpha x = (\alpha x_n)$ によって定義することで線形空間の構造をもつ．ただし和 $x+y$ が ℓ^2 に属することは，有限次元の不等式 $\sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n+y_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N |y_n|^2}$ において $N \to \infty$ とすることによって確かめられる．同時に $\|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_n|^2}$ に対する三角不等式も示されるから，ℓ^2 は $\| \ \|_2$ に関し

ミンコウスキ: Hermann Minkowski, 1864-1909.

てノルム空間となる. □

次の例は文字どおりの意味でのノルム空間ではないが, その距離の定義は本質的にノルム空間におけると同じものである.

■ 例 1.6* ■ $\boldsymbol{p}$ 進距離

整数全体のなす空間 $\boldsymbol{Z}$ に通常とは異なった距離を入れる. 素数 p を固定し, また 1 より大きい実数 a を一つ決めておく. 任意の整数 n は, p と互いに素な整数 n' と 0 以上の整数 e を用いて一意的に $n=n'p^e$ と表現できるから, この e を用いて n の **$\boldsymbol{p}$ 進付値**を $v_p(n)=a^{-e}$ で定義する. また二つの整数 n, m の **$\boldsymbol{p}$ 進距離**を $d_p(n,m)=v_p(n-m)$ で定めれば, これは整数全体の空間 $\boldsymbol{Z}$ 上の距離関数となる. ただし $v_p(0)=0$ である. 三角不等式をいうには $v_p(n+m)\leq v_p(n)+v_p(m)$ を示せばよい. $n=n'p^e$, $m=m'p^f$ と書けるとき, 例えば $e\leq f$ ならば, $n+m$ は少なくとも p^e では割り切れるから, $v_p(n+m)\leq a^{-e}\leq v_p(n)+v_p(m)$. また $n=0$ あるいは $m=0$ の場合はこの不等式は自明である. □

以上の例は, いわば距離がはじめに与えられた空間であったが, 通常, 距離という言葉には “道のり” を測るものとしてのイメージがある. これをそのまま採用して, 曲線の長さによって空間に距離を定義することもできる. ユークリッド空間の部分集合の場合にこの方法を説明しよう. n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 A が与えられたとき, A の任意の二点 p, q に対してこれらを結ぶ A 上の長さ有限の曲線 $\gamma:[a,b]\to A$, $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=q$ が存在するならば, そのような曲線 γ の長さ $\ell(\gamma)$ の下限 $\inf_\gamma \ell(\gamma)$ で p, q の間の距離 $\tilde{d}(p,q)$ を定義する. ここで曲線 $\gamma:[a,b]\to\boldsymbol{R}^n$ の**長さ**は

$$\ell(\gamma) \;=\; \sup_{a=a_0<a_1<\cdots<a_N=b} \sum_{i=1}^{N} d(\gamma(a_{i-1}),\gamma(a_i))$$

で定義され (図 1.3), 区分的に可微分な曲線 $\gamma(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ については

$$\ell(\gamma) \;=\; \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1(t)^2+\cdots+\dot{x}_n(t)^2}\,dt$$

が成り立つ. ただし $\dot{x}_i$ は t に関する導関数 $\dfrac{dx_i}{dt}$ を表す. この $\tilde{d}$ について $\tilde{d}(p,q)\geq 0$, $\tilde{d}(p,p)=0$, $\tilde{d}(p,q)=\tilde{d}(q,p)$ は明らかに成立し, またユークリッドの

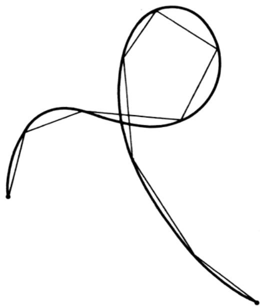


図 1.3　曲線の長さ

距離 $d(p,q)$ との間に $d(p,q)\leq\tilde{d}(p,q)$ の関係があることから $\tilde{d}(p,q)=0$ ならば $p=q$ である. さらに長さの加法性, すなわち曲線 $\gamma_1:[a,b]\to A$ と $\gamma_2:[b,c]\to A$, $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ をつないで得られる $\gamma:[a,c]\to A$, $\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(t), & a\leq t\leq b\\ \gamma_2(t), & b\leq t\leq c\end{cases}$ について $\ell(\gamma)=\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)$ が成り立つことから, $\tilde{d}$ は三角不等式を満たし, 距離の公理をすべて満足する. このように曲線の長さで距離が定義されているような空間を**弧長空間**と呼ぶ. I を区間とするとき, 弧長空間上の曲線 $\gamma:I\to A$ が**測地線**であるとは, γ が局所的に最短曲線であり, かつ弧長でパラメーターづけられているときをいう. すなわち各 $t_0\in I$ に対して十分近い t をとれば $\tilde{d}(\gamma(t),\gamma(t_0))=|t-t_0|$ が成立することである. ユークリッド空間自身に弧長によって定義した距離はユークリッドの距離と一致し, この場合の測地線は直線である.

■ **例 1.7** ■　**球面** S^n

3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ において

$$S^2 \;=\; \{\,(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3\,;\; x^2+y^2+z^2=1\,\}$$

で定義される曲面を**球面**と呼ぶ (図 1.4). 球面上の測地線は大円で与えられるから, 二点 $p,q\in S^2$ 間の弧長による距離 $\tilde{d}(p,q)$ は, $\boldsymbol{R}^3$ の原点を O とするとき角 $\angle pOq$ の大きさと一致する. したがって距離 $\tilde{d}(p,q)$ と, p, q を $\boldsymbol{R}^3$ の点と見なしたときのユークリッドの距離 $d(p,q)$ の間には $d(p,q)=2\sin\dfrac{\tilde{d}(p,q)}{2}$ の関係がある. 同様に **n 次元球面**

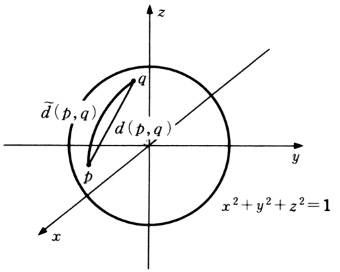


図 1.4 球面

$$S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in \boldsymbol{R}^{n+1}\ ;\ x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$$

においても, 弧長による距離 $\tilde{d}(p,q)$ は角 $\angle pOq$ の大きさと一致する. □

■ **例 1.8*** ■ **上半平面** H

$H=\{(x,y);\, y>0\}$ によって定義される平面 $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合を**上半平面**と呼ぶ. H の二点を結ぶ線分は H に含まれるから, 通常の弧長によって H に定義される距離 $\tilde{d}$ はユークリッドの距離 d と等しいが, 計量を変えることによって d と異なる距離を H に定義することができる. 各点 $(x,y)\in H$ における計量を $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ で定め, H の区分的に滑らかな曲線 $\gamma:[a,b]\to H$, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ の長さ $\ell_H(\gamma)$ を, ユークリッドの計量 $\sqrt{dx^2+dy^2}$ ではなく, 計量 ds による積分で定義する. すなわち

$$\ell_H(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}}{y(t)}dt\ .$$

通常の弧長による距離と同じく, 二点 $p,q\in H$ に対して $\tilde{d}_H(p,q)=\inf_\gamma \ell_H(\gamma)$ とおけば, これは距離の公理を満足する.

距離 $\tilde{d}_H$ に関する測地線を, 端点がともに y-軸上にある場合に決定しよう. 二点 $p_1=(0,y_1)$, $p_2=(0,y_2)$ を結ぶ H の曲線 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ が与えられたとき, $\gamma(t)$ のユークリッド空間の意味での y-軸への射影 $\tilde{\gamma}(t)=(0,y(t))$ も p_1, p_2 を結ぶ曲線であるが, $\dfrac{\dot{y}^2}{y^2}\le\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ より $\ell_H(\tilde{\gamma})\le\ell_H(\gamma)$ が成り立つ(図1.5). したがって p_1, p_2 を結ぶ最短曲線は y-軸上の線分である. このような二点間の距

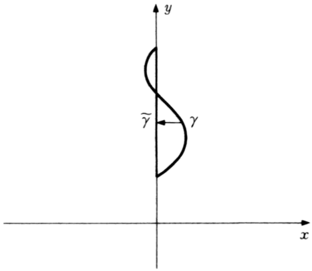


図 1.5

離は $\tilde{d}(p_1, p_2) = \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} \right| = |\log y_1 - \log y_2|$ で与えられるから, y-軸に弧長でパラメーターを入れた曲線 $\gamma_0(t) = (0, e^t)$ は一つの測地線であり, 同様に y-軸に平行な $\gamma_c(t) = (c, e^t)$ も測地線である. 上半平面 H の微分幾何的取扱いに関しては [14] を参照されたい. □

1.1.2　点列の収束

前項で空間上の距離関数を定義したが, 重要なのは距離関数の値ではなく, それから導かれる収束の概念である. 次にそれを述べる.

(X, d) を距離空間とする. 実数空間における数列の場合同様, 各自然数 n に X の点 p_n を対応させる写像 $n \mapsto p_n$ を X の**点列**と呼び, 一般に $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ あるいは $\{p_n\}$ で点列を表す. また $\{p_n\}$ に対し, 適当な $n' \in \boldsymbol{N}$ を抜き出して得られる点列 $\{p_{n'}\}$ を $\{p_n\}$ の**部分点列**あるいは**部分列**という. さて X の点列 $\{p_n\}$ が X の**点 $\boldsymbol{p_\infty}$ に収束する**, あるいは p_∞ を**極限**, **極限点**にもつとは,

$$n \to \infty \quad \text{のとき} \quad d(p_n, p_\infty) \to 0$$

となることをいい, 実数列の場合同様

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p_\infty \qquad \text{あるいは} \qquad p_n \to p_\infty$$

でこれを表す (図 1.6). 特に距離関数 d を考えていることを明記したい場合には**距離 $\boldsymbol{d}$ のもとで収束する**, あるいは**距離 $\boldsymbol{d}$ に関して収束する**という. いわゆる ε-δ 論法でいえば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な N が存在して $n \geq N$ のとき $d(p_n, p_\infty) < \varepsilon$ が成り立つことである.

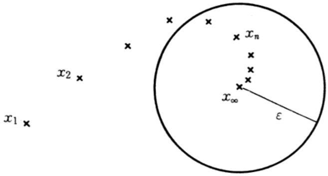


図 1.6 点列の収束

【定理 1.1】 距離空間においては収束点列の極限は一意であり, また部分列は同一の極限に収束する.

証明 点 p_∞, p'_∞ がともに点列 $\{p_n\}$ の極限であったとすれば,

$$d(p_\infty, p'_\infty) \ \leq \ d(p_n, p_\infty) + d(p_n, p'_\infty) \ \to \ 0$$

より $d(p_\infty, p'_\infty) = 0$ でなければならない. すなわち $p_\infty = p'_\infty$ である. 後半は明らかであろう. ■

空間 X に対して距離関数 d, d' が与えられている場合, 一般には当然この二つに関する収束の概念は異なっている. これらが一致する場合, すなわち点列 $\{p_n\}$ と p_∞ に対し, d に関して $\{p_n\}$ が p_∞ に収束することと, d' に関して $\{p_n\}$ が p_∞ に収束することが同値であるとき, 二つの距離 d, d' は空間 X に**同じ位相を定める**, あるいは**同じ位相を定義する**という. このように点列に関する収束の概念が一致する二つの距離に関しては, 関数や写像の連続性, またそれから導かれる空間の種々の性質はまったく等しい. この意味で空間のこれらの性質は, 距離ではなく "位相" によって定まっているという言い方をする. これを距離の同値と呼ぶ文献もあるが, 一様同値 (p.190) と混同するおそれがあるので, 本書では用いない.

【命題 1.2】 空間 X 上の二つの距離関数 d, d' に対し, 正の定数 c, c' が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して $cd(x,y) \leq d'(x,y) \leq c'd(x,y)$ が成り立つならば, 距離 d, d' は X に同じ位相を定義する.

証明は明らかであろう. しかしこの命題の逆は成立しない. 例えば $[0,1]$ の距

離 $d'(x,y)=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$ は, 通常の距離 $d(x,y)=|x-y|$ と同じ位相を $[0,1]$ に定めるが, $d'(x,y)\leq c'd(x,y)$ を満たす $c'>0$ は存在しない.

【命題 1.3】 距離空間が与えられたとき, その距離関数を, 空間に定義する位相を変えずに有界な距離関数で置き換えることができる.

証明　X を空間, d をその上の距離とするとき, 新たな距離 d' を $d'(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$ で定義する. 関数 d' が距離の公理のうち正値性 (D_1) と対称律 (D_2) を満たすことは明らか. 三角不等式 (D_3) は $d'(x,y)<1$ かつ $d'(y,z)<1$ の場合, d についての三角不等式より $d'(x,z)\leq d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)=d'(x,y)+d'(x,y)$. また $d'(x,y)=1$ あるいは $d'(y,z)=1$ の場合, 必ず $d'(x,z)\leq 1$ であることから正しい. これより d' は距離関数となるが, 値の小さいところでは d' と d とは一致しているので, 数列の収束の概念が同一であり, したがって d と d' とは X 上に同じ位相を定める. d' の定義式における 1 には格別の意味はなく, 他の正の数で置き換えてもよい. ■

整数全体のなす空間 $\boldsymbol{Z}$ 上の通常の距離 $d(p,q)=|p-q|$ に対して, この命題による $d'(p,q)=\min\{d(p,q),1\}$ を考えれば, $p\neq q$ に対して $d'(p,q)=1$ であるから d' は離散距離となる. この意味で $\boldsymbol{Z}$ は離散距離空間である. このように改変した距離はもはや "道のり" として解釈することはできない. 距離の公理を必要最小限に留めたため, 通常のイメージに合わないこのような距離をも容認することになったが, これは後々, いろいろな空間に距離構造を入れる際の議論を簡略にするためにやむを得ないことである.

■ 例 1.9 ■ ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$　(参照 例 1.3, p.3)

$\boldsymbol{R}^n$ の二点 $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ の間のユークリッドの距離 d は

$$|x_i-y_i| \;\leq\; d(x,y) \;\leq\; \sqrt{n}\,\sup_i |x_i-y_i|$$

を満足するから, 距離 d に関して $x\to y$ ならば各座標 x_i について $x_i\to y_i$ であり, 逆にすべての $i=1,\cdots,n$ について $x_i\to y_i$ ならば $x\to y$ である. したがって d に関して点列 $\{p_k\}$ が p に収束することは p_k の各第 i 座標が p の第 i 座標に収束することと同値である. また $\boldsymbol{R}^n$ には, 他に距離 d_1, d_∞ が定義されていた

が, 不等式

$$d(x,y) \;\le\; d_1(x,y) \;\le\; nd_\infty(x,y) \;\le\; nd(x,y)$$

が成立することから, d_1, d_∞ ともユークリッドの距離 d と同じ位相を $\boldsymbol{R}^n$ に定義する (命題 1.2). □

■ 例 1.10 ■ 連続関数の空間 $C[0,1]$　(参照 例 1.4, p.6)

無限次元空間 $C[0,1]$ においては, 距離 d_1 と d_∞ の定義する位相は異なっている. 実際 $f_n(t)=t^n$ で与えられる関数列 $\{f_n\}$ を考えれば, 0 で恒等的に 0 の値をとる関数を表すとき,

$$\begin{aligned} d_1(f_n,0) &= \int_0^1 |t^n|dt = \frac{1}{n+1} \to 0\ , \\ d_\infty(f_n,0) &= \sup_{0\le t\le 1} |t^n| = 1 \not\to 0\ . \end{aligned}$$

よって関数列 $\{f_n\}$ は距離 d_1 のもとでは 0 に収束するが, d_∞ のもとでは収束しない (図 1.7). 同様に $1\le p,q\le\infty$, $p\ne q$ に対して d_p と d_q は $C[0,1]$ に異なる位相を定義する (章末問題 3, p.53). これらを区別するために, 距離 d_∞ に関する収束を**一様収束**, 距離 d_p, $1\le p<\infty$ に関する収束を ***p* 次平均収束**と呼ぶ.

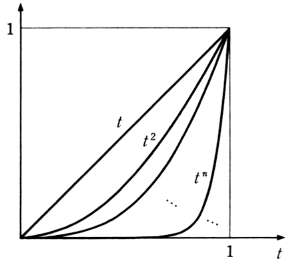


図 1.7　平均収束 □

1.1.3　関数と写像の連続性

距離空間 (X,d) 上の実数値関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ の連続性を定義する. p を X の点とするとき, 値 a が関数 f の $x\to p$ のときの**極限**, **極限値**である, あるいは $x\to p$ のとき関数値 $f(x)$ が ***a* に収束する**とは, $d(x,p)\to 0$ に対して $f(x)\to a$ が成立することをいい,

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

でこれを表す．記号 $x \to p$ を $d(x,p) \to 0$ の意味で用いている．関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ が X の**点 p で連続**とは，$x \to p$ のときの極限が存在してかつ p での関数値 $f(p)$ に一致すること，すなわち

$$x \to p \quad \text{のとき} \quad f(x) \to f(p)$$

が成り立つことをいう．ε-δ 式にいえば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な $\delta > 0$ が存在して $d(x,p) < \delta$ のとき $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ が成立することである．定義域 X の任意の点において連続なる関数を単に**連続**という．

一般に二つの距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の間の写像 $\varphi: X \to Y$ についても，

$$x \to p \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) \to \varphi(p)$$

が成立するならば φ は**点 p で連続**であるといい，各点で連続な写像を単に**連続**という．距離を保つ写像，すなわち $d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) = d_X(x, x')$ が常に成り立つような φ は連続であるが，これを**等長写像**あるいは**等距離写像**と呼ぶ．例えば平面 $\boldsymbol{R}^2$ から空間 $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $(x,y) \mapsto (x,y,0)$ は等長である．

写像 $\varphi: X \to Y$ が全単射であり，かつ φ 自身およびその逆写像 φ^{-1} がともに連続であるとき，この φ を**同相写像**，**位相写像**あるいは**双連続**と呼ぶ．全射であるような等長写像は同相写像である．同相写像 $\varphi: X \to Y$ が存在するような X と Y とは**同相**，**同位相**あるいは**位相同型**であるという．

【定理 1.4】 X, Y, Z を距離空間とする．写像 $\varphi: X \to Y$ が点 $p \in X$ で，また写像 $\psi: Y \to Z$ が点 $q = \varphi(p) \in Y$ で連続ならば，合成写像 $\psi \circ \varphi: x \mapsto \psi(\varphi(x))$ は p で連続．特に連続写像の合成写像は再び連続となる．

証明　$x \in X$, $y = \varphi(x) \in Y$, $z = \psi(y) \in Z$ とする．仮定より $x \to p$ のとき $y \to q$, したがって $z \to \psi(q) = \psi(\varphi(p))$. ■

【定理 1.5】 距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の間の写像 $\varphi: X \to Y$ が点 $p \in X$ で連続であるための必要十分条件は，p に収束するすべての点列 $\{p_n\}$ について $\varphi(p_n) \to \varphi(p)$ が成立すること．

証明　φ が点 p で連続であれば, $p_n \to p$ なるとき $\varphi(p_n) \to \varphi(p)$. 逆に φ が点 p で連続でないとしよう. このとき連続性の定義より $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対し $d_X(x,p) < \delta$ だが $d_Y(\varphi(x), \varphi(p)) > \varepsilon$ なる点 $x \in X$ をとることができる. 特に $\delta = 1/n$ に対する x を p_n と書けば, 点列 $\{p_n\}$ は p に収束するけれども, その φ による像 $\{\varphi(p_n)\}$ は $\varphi(p)$ には収束しない. ■

【系 1.6】　空間 X 上定義された二つの距離関数 d, d' が同じ位相を定めるための必要十分条件は恒等写像 $\mathrm{id} : (X,d) \to (X,d')$ が同相写像であること.

■ 例 1.11 ■　一点からの距離

X を距離空間, d をその距離関数とする. 一点 p を固定すれば, $x \in X$ に実数 $d(x,p)$ を対応させる写像 $d(\cdot,p) : X \to \boldsymbol{R}$ は X 上の実数値関数であるが, 三角不等式 (D_3')

$$|d(x,p) - d(y,p)| \ \leq \ d(x,y)$$

は $d(\cdot,p)$ が連続であることを示している. 特にノルム空間 V において, その元 v にノルムの値 $\|v\| = d(v,0)$ を対応させる写像 $\|\ \| : V \to \boldsymbol{R}$ は連続である. □

■ 例 1.12 ■　リプシッツ連続写像

距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の間の写像 $\varphi : X \to Y$ が**リプシッツ連続**であるとは, 適当な正の実数 K が存在して $d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leq K d_X(x,y)$ が成立するときをいい, このときの K を**リプシッツ定数**と呼ぶ. 上の例で述べた一点からの距離はリプシッツ定数 1 のリプシッツ連続関数である. リプシッツ連続写像が連続であることは明らかであろう. □

■ 例 1.13 ■　ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上の線形写像

n 次元ユークリッド空間からノルム空間 V への線形写像 $L : \boldsymbol{R}^n \to V$ は常に連続であることを示す. $\boldsymbol{R}^n$ の標準基底を $e_i = (0, \cdots, \overset{i}{\check{1}}, \cdots, 0)$, $i = 1, \cdots, n$ とすると, 線形性より L は $x = (x_i)$ を $\sum x_i L(e_i)$ に写す. したがって $\|L(x)\| \leq \sum |x_i| \|L(e_i)\| \leq (\sum \|L(e_i)\|) \|x\|$.　これより $\|L(x) - L(y)\| = \|L(x-y)\| \leq$

リプシッツ: Rudolf Lipschitz, 1832-1903.

$(\sum\|L(e_i)\|)\,\|x-y\|$ が成り立つから, L は連続である. 特にノルム空間 V が有限次元の場合, 基底 $v_1,\cdots,v_m$, $m=\dim V$ を選ぶことによって, ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^m$ から V への線形空間としての同型写像が $\varphi:(a_i)\mapsto\sum a_iv_i$ で定義されるが, これは連続写像である. 実際にはこの φ はさらに同相写像でもあるのだが, その証明は後に譲る (例 4.13, p.135). また線形写像 $L:V\to W$ と一つのベクトル $b\in W$ を用いて $A(x)=L(x)+b$ と表現される写像 $A:V\to W$ を**アファイン写像**と呼ぶが, ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ からノルム空間への任意のアファイン写像は連続である. ただし無限次元ノルム空間上の線形写像に関してはこの限りではない. 連続関数の空間 $C[0,1]$ に 1 次ノルム $\|\ \|_1$ を入れ, $f\in C[0,1]$ に $t=1$ での値 $f(1)$ を対応させる線形写像 $\mathrm{ev}_1:C[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を考える. 関数列 $f_n(t)=t^n$, $n=1,2,\cdots$ は $\|f_n\|_1=\displaystyle\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}\to 0$ によって 1 次ノルムのもとで恒等的に 0 の値をとる関数 0 に収束するけれども, その一方で $\mathrm{ev}_1(f_n)=f_n(1)=1\not\to 0$ であるから, 線形写像 ev_1 は $C[0,1]$ 上連続ではない. □

■ 例 1.14 ■ ノルム空間上の連続線形汎関数

ノルム空間 $(V,\|\ \|)$ に対して, 線形写像 $L:V\to\boldsymbol{R}$ を**線形汎関数**と呼び, 正の数 C が存在して $|L(v)|\le C\|v\|$ が成り立つとき, L を**有界**という. 有界な汎関数はリプシッツ連続で, したがって連続であるが, 逆にノルム空間上の連続な線形汎関数は常に有界であり, これよりリプシッツ連続となる. 証明は以下の通り. L の連続性から, $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を選んで, $\|v\|\le\delta$ ならば $|L(v)|\le\varepsilon$ となるようにできる. このような ε と δ の組を一つとり $C=\varepsilon/\delta$ とおく. さて $v\in V$, $v\neq 0$ に対して $v'=\dfrac{\delta}{\|v\|}v$ とおくと, $\|v'\|=\delta$ より $|L(v')|\le\varepsilon$ が成り立つが, L は線形であったから $L(v')=\dfrac{\delta}{\|v\|}L(v)$. したがって $|L(v)|\le C\|v\|$ が成立する.

二つのノルム空間 $(V,\|\ \|_V)$, $(W,\|\ \|_W)$ の間の線形写像 $L:V\to W$ についても, 定数 C が存在して任意の $v\in V$ に対して $\|L(v)\|_W\le C\|v\|_V$ が成り立つとき L を**有界**と呼ぶ. この場合も有界性は連続性と同値である. したがって線形空間 V 上に定義された二つのノルム $\|\ \|$, $\|\ \|'$ が V に同じ位相を定義するための必要十分条件は, 正の定数 c_1, c_2 が存在して任意の $v\in V$ について

$$c_1\|v\|\le\|v\|'\le c_2\|v\|$$

が成立すること. このような二つのノルム $\| \|, \| \|'$ は**同値**であるという. □

■ 例 1.15 ■ 四則演算

四則演算 $(x,y)\mapsto x\pm y, xy, x/y$ は $\boldsymbol{R}^2$ あるいは $\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$ 上の関数として連続である. 周知の事実ではあろうが念のため証明を与える. 実数 x_0, y_0 が与えられたとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な $\delta>0$ をとり, $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ ならば x, y についての演算結果と x_0, y_0 についての演算結果との差が ε 未満となることを示せばよい. 加法および減法に関しては

$$|(x\pm y)-(x_0\pm y_0)| \;\le\; |x-x_0|+|y-y_0|$$

より $\delta=\varepsilon/2$ にとればよい. この場合の δ は x_0, y_0 によらない. すなわち加法および減法は一様連続である (参照 p.130). 乗法に関しては, 不等式

$$\begin{aligned}|xy-x_0y_0| &\le |xy-xy_0|+|xy_0-x_0y_0|\\ &= |x||y-y_0|+|x-x_0||y_0|\\ &\le |x-x_0||y-y_0|+|x_0||y-y_0|+|x-x_0||y_0|\end{aligned}$$

より, $\delta^2<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $(|x_0|+|y_0|)\delta<\dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たすように δ をとればよい. 除法に関しては

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{y}-\frac{x_0}{y_0}\right| &\le \frac{|xy_0-x_0y_0|+|x_0y_0-x_0y|}{|y||y_0|}\\ &\le \left(|x-x_0|+\frac{|x_0|}{|y_0|}|y-y_0|\right)\frac{1}{||y_0|-|y-y_0||}\end{aligned}$$

より $\delta<\dfrac{|y_0|}{2}$, $\left(1+\dfrac{|x_0|}{|y_0|}\right)\delta<\dfrac{\varepsilon}{2}|y_0|$ を満足する δ をとればよい. 複素数の四則の連続性は, その結果が実部と虚部の四則によって表されることから, 実数の場合から導かれる. □

■ 例 1.16 ■ 四則で得られた関数

X を距離空間とするとき, X上の関数 $f, g: X\to\boldsymbol{R}$ の対 (f,g) は写像 $X\to\boldsymbol{R}^2$, $x\mapsto(f(x), g(x))$ と見なすことができる. このとき $\boldsymbol{R}^2$ の距離の性質から, 対の写像 (f,g) が連続となるのはおのおのの f, g が連続となるとき, そのときに限る. 関数 f と g との四則 $f\pm g$, $f\cdot g$, f/g はこの対の写像と実数の四則との合成写像であるから, 四則の連続性より, f, g がともに連続関数であればこれらの

関数はすべて連続となる．ただし商 f/g を考える場合には X 上 $g\neq 0$ であることを要請する．同様に n 変数の連続関数 $F:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ が与えられた場合，各 $f_i:X\to\boldsymbol{R}$ が連続ならば，合成関数 $x\mapsto F(f_1(x),\cdots,f_n(x))$ も連続となる．□

■ 例 1.17* ■ 連続関数の空間 $C[0,1]$ における積

先の例では，二つの連続関数 f,g の積として与えられる関数 $f\cdot g$ の連続性を扱ったが，ここでは $(f,g)\mapsto f\cdot g$ によって定義される関数空間の間の写像の連続性を考える．一般の積を扱うためには後に述べる直積の距離が必要となるので，その代わりに二乗を対応させる写像 $s:C[0,1]\to C[0,1]$, $s(f)(t)=(f(t))^2$ を調べよう．$C[0,1]$ に $\|f\|_\infty=\sup|f(t)|$ から定まる距離 d_∞ を入れた場合には，実数の積の場合と同様

$$\begin{aligned}\|s(f)-s(f_0)\|_\infty &\leq \|f\|_\infty\|f-f_0\|_\infty+\|f-f_0\|_\infty\|f_0\|_\infty\\ &\leq \|f-f_0\|_\infty^2+2\|f_0\|_\infty\|f-f_0\|_\infty\end{aligned}$$

より s は連続写像である．しかしながら $\|f\|_1=\displaystyle\int_0^1|f(t)|dt$ から定まる距離 d_1 を考えた場合には

$$f_n(t)=\begin{cases}\sqrt{n(1-nt)}, & 0\leq t\leq \dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}\leq t\leq 1\end{cases}$$

で定義される関数列 $\{f_n\}$ は

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1|f_n(t)|dt = -\frac{2}{3n^2}\sqrt{n(1-nx)}^3\Big|_0^{1/n} = \frac{2}{3\sqrt{n}} \to 0$$

であるから 1 次ノルムに関して $f_n\to 0$ を満たすけれども

$$\|s(f_n)\|_1 = \int_0^1(f_n(t))^2\,dt = nx-\frac{n^2}{2}x^2\Big|_0^{1/n} = \frac{1}{2}$$

より $s(f_n)\not\to 0$ (図 1.8)．したがって距離 d_1 に関しては写像 s は連続ではない．□

■ 例 1.18* ■ 多項式の根の連続性

四則の連続性から，多項式の値は変数および係数に関して連続であるが，根も係数に関して連続に変化する．複素変数 z の複素係数多項式 $p(z)$ と，その根を周

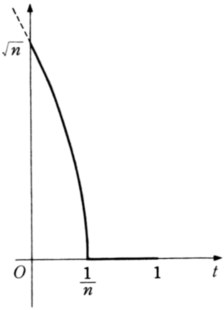


図 1.8

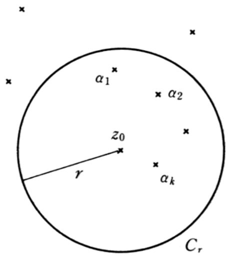


図 1.9

上にもたない複素平面上の円 $C_r=\{z;\ |z-z_0|=r\}$ が与えられたとしよう. この円で囲まれる領域 $|z-z_0|<r$ に含まれる $p(z)$ の根を, 重複も込めて$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ とおき, $p(z)$ を $p(z)=(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_k)q(z)$ と分解する (図 1.9). 導関数 $p'(z)$ と $p(z)$ との比は $\dfrac{p'(z)}{p(z)}=\dfrac{1}{z-\alpha_1}+\cdots+\dfrac{1}{z-\alpha_k}+\dfrac{q'(z)}{q(z)}$ で与えられるから, $q(z)$ が C_r で囲まれる領域に根をもたないことより

$$\int_{C_r}\frac{p'(z)}{p(z)}dz \;=\; 2\pi k\sqrt{-1}\ .$$

これは円周 C_r 上の周回積分によって内部の根の数が決定されることを示している. 詳しくは関数論の教科書を参照されたい. 特に積分値が整数の $2\pi\sqrt{-1}$ 倍に限られることに注意する.

多項式 $p(z)$ が $z=z_0$ を k 重根にもつならば, 半径 r を小さくとって $\displaystyle\int_{C_r}\frac{p'(z)}{p(z)}dz$ $=2\pi k\sqrt{-1}$ が成り立つようにできる. ここで $p'(z)$ は $p(z)$ の導関数である. さて多項式 $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ をその係数の表す n 次元ベクトル $(a_{n-1},\cdots,a_0)\in\boldsymbol{R}^n$ と同一視してこれによって多項式の全体に距離 d を入れ, d の下での $p(z)$ の摂動 $\tilde{p}(z)=z^n+\tilde{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\tilde{a}_0$ を考える. 円周 C_r 上では $z=z_0+re^{\sqrt{-1}\theta}$ とおくことによって $|p(z)|$ は実変数 θ の実数値関数と見なすことができるが, θ が閉区間 $[0,2\pi]$ を動くとき, この関数は常に正の値をとる. 閉区間上の実数値連続関数が最小値をとることを認めれば (最大値の定理, p.132), その最小値も正である. したがって C_r 上 $1,|z|,\cdots,|z|^n\leq M$ が成り立つような M に対し

て $|\tilde{p}(z)-p(z)|\le M|\tilde{a}_{n-1}-a_{n-1}|+\cdots+M|\tilde{a}_0-a_0|\le nMd(\tilde{p},p)$ となることから, 距離 $d(\tilde{p},p)$ が小さいとき $\tilde{p}(z)$ も C_r 上 0 とならない. さらに導関数についても C_r 上 $|\tilde{p}'(z)-p'(z)|\le(n-1)M|\tilde{a}_{n-1}-a_{n-1}|+\cdots+M|\tilde{a}_1-a_1|\le(n-1)^2Md(\tilde{p},p)$ が成り立つことから $d(\tilde{p},p)$ が小さければ積分値 $\displaystyle\int_{C_r}\frac{\tilde{p}'(z)}{\tilde{p}(z)}dz$ は $\displaystyle\int_{C_r}\frac{p'(z)}{p(z)}dz=2\pi k\sqrt{-1}$ に近い. 一方で積分値は整数の $2\pi\sqrt{-1}$ 倍のみをとるから, 結局 $2\pi k\sqrt{-1}$ がその値となる. したがって多項式 $\tilde{p}(z)$ は C_r で囲まれる領域にちょうど k 個の根をもつ. 特に $k=1$ の場合, 小さい $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を選んで, $d(\tilde{p},p)<\delta$ ならば $\tilde{p}(z)$ が $|z-z_0|<\varepsilon$ の範囲にただ一つの根 $\alpha(\tilde{p})$ をもつようにできる. すなわち多項式の根は係数に連続的に依存する. □

■ 例 1.19* ■ フーリエ展開

与えられた関数を三角関数の無限和として表現することを**フーリエ展開**, その無限和を**フーリエ級数**と呼ぶ. ここでは閉区間 $[-1,1]$ 上の連続関数 $f(t)$ を

$$f(t) \;=\; \frac{a_0}{2}+a_1\cos\pi t+b_1\sin\pi t+\cdots+a_n\cos\pi nt+b_n\sin\pi nt+\cdots$$

と級数の和として書くことを考える. 正確には有限和

$$s_N(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\pi t+b_1\sin\pi t+\cdots+a_N\cos\pi Nt+b_N\sin\pi Nt$$

の極限として $f(t)$ を表そうというのである. このために収束の概念, すなわち $[-1,1]$ 上の連続関数全体の空間 $C[-1,1]$ の位相を確定する必要があるが, ここではノルム $\|f\|_2=\left(\displaystyle\int_{-1}^{1}(f(t))^2dt\right)^{1/2}$ から定まる距離を考える. シュワルツの不等式 (p.247) より $[-1,1]$ 上の任意の連続関数 $g(t)$ に対して

$$\left(\int_{-1}^{1}(f(t)-s_N(t))\,g(t)dt\right)^2 \;\le\; \int_{-1}^{1}(f(t)-s_N(t))^2dt\int_{-1}^{1}(g(t))^2dt$$

が成立するから, このノルム $\|\ \|_2$ の下で $s_N\to f$ ならば $\displaystyle\int_{-1}^{1}s_N(t)g(t)dt\to\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt$. 一方

$$\int_{-1}^{1}\cos\pi nt\cos\pi mtdt \;=\; \int_{-1}^{1}\sin\pi nt\sin\pi mtdt \;=\; \delta_{nm}$$

フーリエ: Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1763-1830.

$$\int_{-1}^{1} \cos \pi nt \sin \pi mt dt = 0$$

が成立することから, 有限和 $s_N(t)$ と三角関数 $\cos \pi nt$, $\sin \pi nt$ との積の $[-1,1]$ 上の積分は N によらず $\int_{-1}^{1} s_N(t) \cos \pi nt dt = a_n$, $\int_{-1}^{1} s_N(t) \sin \pi nt dt = b_n$ を満たす. ただし δ_{nm} は**クロネッカーのデルタ**であって $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ で定義されている. したがってノルム $\| \ \|_2$ のもとで $s_N \to f$ ならば $g(t) = \cos \pi nt$, $\sin \pi nt$ ととることにより, 有限和 s_N の $\cos \pi nt$, $\sin \pi nt$ の各係数 a_n, b_n は

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t) \cos \pi nt dt, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(t) \sin \pi nt dt$$

を満足しなければならない. この式で与えられる a_n, b_n を関数 f の**フーリエ係数**という. 連続関数のフーリエ係数 a_n, b_n に関して**パーセヴァルの等式**

$$\int_{-1}^{1} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

が成立することが知られている. これは $C[-1,1]$ から数列空間 ℓ^2 への写像

$$f \mapsto \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}, \ a_1, \ b_1, \ \cdots, \ a_n, \ b_n, \ \cdots \right)$$

がノルムを保ち, したがって等長写像であることを示している. 特にこれらの係数 a_n, b_n による有限和 s_N について, $f(t) - s_N(t)$ のフーリエ係数が a_N, b_N までは 0 であり, それ以降は $f(t)$ のフーリエ係数と一致することから $\|f - s_N\|_2^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n^2$ が成り立つが, 右辺は収束級数の末尾であるから $N \to \infty$ のとき 0 に収束する. したがって $\| \ \|_2$ の下で $s_N \to f$. すなわち連続関数は常にフーリエ展開可能である. この係数によって定義された連続関数のフーリエ級数はもとの関数に各点収束するとは限らないが, もし関数 f が区分的に連続的微分可能でありかつ $f(-1) = f(1)$ を満たせば, 級数 $s_N(t)$ は $[-1,1]$ 上一様に $f(t)$ に収束することも知られている. パーセヴァルの等式とフーリエ級数の一様収束については, 例えば [5] を参照されたい. □

クロネッカー: Leopold Kronecker, 1823-1891.

パーセヴァル: Marc Antoine Parseval, 1755-1836.

■ **例 1.20*** ■ **上半平面 H の等長写像** (参照 例 1.8, p.9)
まず上半平面 H の距離 $\tilde{d}_H$ がユークリッドの距離 d と同じ位相を H に定めることを述べる. 各点 $p_0=(x_0,y_0)\in H$ に対して $0<\varepsilon<y_0$ を満たす ε をとれば, $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $U=\{p; d(p,p_0)<\varepsilon\}$ は H に含まれ, U 内の曲線 γ についてユークリッドの計量による長さ $\ell(\gamma)$ と $\ell_H(\gamma)$ の間に $(y_0-\varepsilon)\ell(\gamma)\leq\ell_H(\gamma)\leq(y_0+\varepsilon)\ell(\gamma)$ の関係がある. これより $p\in U$ について $(y_0-\varepsilon)d(p,p_0)\leq\tilde{d}_H(p,p_0)\leq(y_0+\varepsilon)d(p,p_0)$ であり, 一方 $p\notin U$ については p と p_0 を結ぶ曲線が U の外へ出ることから $\tilde{d}_H(p,p_0)\geq(y_0-\varepsilon)\varepsilon$. よって距離 $\tilde{d}_H$ は d と同じ位相を H に定める.

次に上半平面 H を同一視 $z=x+y\sqrt{-1}$ によって複素平面 $\boldsymbol{C}$ の部分集合と見なす. このとき一次分数変換 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\boldsymbol{R}$, $\alpha\delta-\beta\gamma>0$ は H を H に写す. w の z に関する微分は $\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma z+\delta)^2}$ で与えられる. また $w=u+v\sqrt{-1}$ とおくとき, $w-\bar{w}=\dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-\bar{z})}{(\gamma z+\delta)(\gamma\bar{z}+\delta)}$ より $v^2=-\dfrac{1}{4}(w-\bar{w})^2=-\dfrac{1}{4}\dfrac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2(z-\bar{z})^2}{(\gamma z+\delta)^2(\gamma\bar{z}+\delta)^2}$. ただし $\bar{z}$, $\bar{w}$ はそれぞれ z, w の共役複素数 $x-y\sqrt{-1}$, $u-v\sqrt{-1}$ を表す. 以上より $\dfrac{du^2+dv^2}{v^2}=\dfrac{dwd\bar{w}}{v^2}=\dfrac{dzd\bar{z}}{y^2}=\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ であり, 変換 $z\mapsto w$ は $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ の定める距離 $\tilde{d}_H$ に関して等長写像となっている. これより測地線の φ による像は再び測地線となるが, 一次分数変換が角度を保つことと円を円に写すことによって, 虚軸に平行な直線は実軸に直交する円に写される. 上半平面上の任意の二点に対して, これらを虚軸上に写す一次分数変換が存在するから, 測地線はこのような円に限ることがわかる (図 1.10). 逆に実軸に直交する円を実軸に直交する円に写すような連続な変換は一次分数変換および一次分数変換と虚軸に関する鏡映 $z\mapsto-\bar{z}$ の合成に限るから, これで上半平面の等長写像全体が決定され

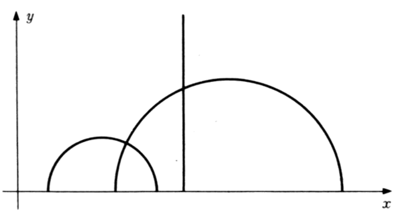


図 1.10　上半平面の測地線

た. 一次分数変換と円円対応については [9],[10] を参照されたい. □

<まとめ> 距離空間および点列による関数, 写像の連続性の定義を与えた. 具体例としては, 距離空間の原点であるユークリッド空間, ノルム空間としての連続関数の空間および弧長空間などの距離空間を紹介し, またそれらの空間の上の関数, 写像の連続性を調べた. 連続関数の空間は, 異なる位相を定義する自然な距離を複数もつ空間の典型例であり, 一般位相の重要な応用である関数解析においてもたびたび扱われる. またここで述べた弧長空間は多様体論において扱われるリーマン計量による距離の特別の場合である.

[例題] 平面上の半径が正の閉円板全体のなす集合を X とし, $A, B \in X$ に対し

$$d(A, B) = m(A \ominus B)$$

とおく. ただし $A \ominus B$ は**対称差** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を, m は面積を表す (図 1.11).

(1) d が距離の公理を満たすことを確かめよ.

(2) 距離空間 (X, d) は 3 次元ユークリッド空間と同相であることを示せ.

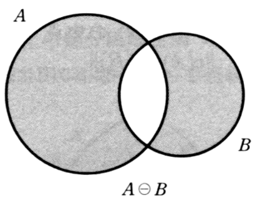


図 1.11 対称差

(解) (1) $A \in X$ の中心を $c(A)$, 半径を $r(A)$ と書く. 定義より $d(A, B) \geq 0$. A と B とが共通部分をもつ, すなわち $\|c(A)-c(B)\| \leq r(A)+r(B)$ のとき, $c(A)$ と $c(B)$ とを結ぶ直線上の線分で, 長さが $\|c(A)-c(B)\|$ 以上で, かつその内部が $A \ominus B$ に含まれるものが存在するから $d(A, B) \geq \dfrac{\pi}{4}\|c(A)-c(B)\|^2$ (図 1.12). A と B とが共通部分をもたないとき $d(A, B) = \pi(r(A)^2 + r(B)^2)$ であるから, $d(A, B) = 0$ から $A = B$ が導かれる. 対称性 $d(A, B) = d(B, A)$ は明らかであるから, あとは三角不等式を調べればよい. A, B, C の配置における各部分に図 1.13 のように名前をつける.

リーマン: Georg Friedrich B. Riemann, 1826-1866.

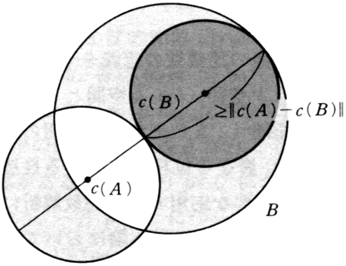


図 1.12

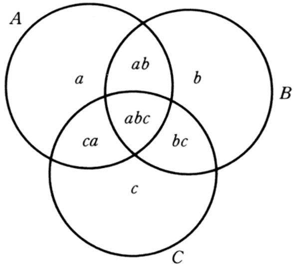


図 1.13

このとき $d(A,B)=m(a)+m(ca)+m(b)+m(bc)$, $d(B,C)=m(b)+m(ab)+m(c)+m(ca)$より, $d(A,C)=m(a)+m(ab)+m(c)+m(bc)\leq d(A,B)+d(B,C)$ が成り立つ.

(2)　$d(A,B)\geq|m(A)-m(B)|=\pi|r(A)^2-r(B)^2|$ より $r(A)$ は A の連続関数であり, また $\|c(A)-c(B)\|\leq r(A)+r(B)$ のとき $d(A,B)\geq\dfrac{\pi}{4}\|c(A)-c(B)\|^2$ が成り立つことから $c(A)$ も A に関して連続である. したがって写像 $\varphi: X\to\boldsymbol{R}^3$, $A\mapsto(c(A),\log r(A))$ は連続な全単射である. あとは逆写像 φ^{-1} の連続性をいえばよい. $r(A)\leq r(B)$ とするとき, $c(A)$ と $c(B)$ の中点 c を中心とする半径 $r(B)+\dfrac{\|c(A)-c(B)\|}{2}$ の円と半径 $r(A)-\dfrac{\|c(A)-c(B)\|}{2}$ の円に囲まれる領域は差集合 $A\ominus B$ を含む (図 1.14). よって

$$d(A,B)\ \leq\ \pi\left(r(B)+\frac{\|c(A)-c(B)\|}{2}\right)^2-\pi\left(r(A)-\frac{\|c(A)-c(B)\|}{2}\right)^2$$

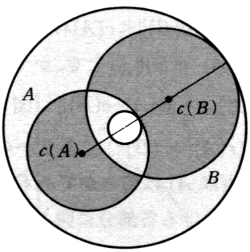


図 1.14

$r(B) \leq r(A)$ のときには A と B とをとりかえた不等式が成立するから, 逆写像 φ^{-1} も連続であることがわかる. ■

1.2 部分空間と直積空間

この節では, 与えられた距離空間から新たに導かれる距離空間として, 部分空間と直積空間について述べる.

1.2.1 部分空間

一般的な言葉として"空間"を用いる場合には"場"としてのイメージが大きいが, 数学においては, そこに含まれる図形あるいは部分集合もまた空間として扱われる. このような図形もしくは部分集合においても, 収束あるいは連続性の議論が必要となるからである. これを部分空間と呼ぶ. 距離空間において部分空間を考えることは, 単に距離関数を部分集合に制限することにほかならない.

距離空間 X の部分集合 A が与えられたとする. このとき X 上の距離 d を A, 正確には $A \times A$ に制限した関数 $d_A(x,y)=d(x,y)$ は距離の公理を満たし, A 上の距離関数となる. 簡単のためこれを同じ記号 d で表し, この距離を与えた部分集合 (A,d) を (X,d) の**部分距離空間**あるいは単に**部分空間**と呼ぶ (図 1.15). 包含写像 $\iota: A \hookrightarrow X$ はこの距離に関して連続である.

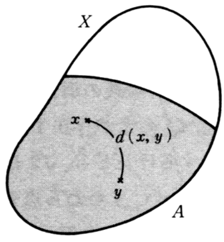


図 1.15 部分距離空間

われわれが図形として認識する対象は, おもに有限次元, 特に 2, 3 次元のユークリッド空間の部分集合であり, 部分距離空間と見なすことができる. 平面図形は $\boldsymbol{R}^2$ の部分距離空間, 立体図形は $\boldsymbol{R}^3$ の部分距離空間である. このような図形上の点に対する通常の感覚による"近さ"は, ユークリッドの距離の制限によっ

て導かれるものとほとんどの場合同一である.

■ 例 1.21 ■ 区間

開区間 (a,b) あるいは 閉区間 $[a,b]$ は実数空間の部分空間である. 二つの有限開区間の間の写像 $\varphi:(a,b)\to(a',b')$ を $\varphi(x)=\dfrac{b'-a'}{b-a}(x-a)+a'$ で定義すれば φ およびその逆写像 φ^{-1} が連続で, したがってこの二つの開区間は同相となる (図 1.16). 同様の写像によって長さをもつ任意の二つの閉区間は同相である. 開区間はまた無限開区間 $(-\infty,b)$, (a,∞) および実数空間 $\boldsymbol{R}$ 自身とも同相である. 例えば $\varphi(x)=\tan x$ で与えられる写像 $\varphi:(-\pi/2,\pi/2)\to\boldsymbol{R}$ を考えればよい. これに反して開区間と閉区間とは同相とはならないが, その証明にはコンパクト性あるいは連結性の概念が必要である (p.128; 例 5.1, p.168).

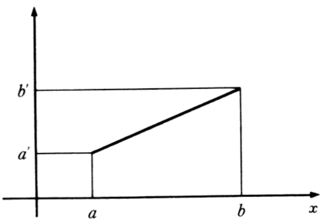


図 1.16 区間の同相写像 □

■ 例 1.22 ■ 有理数全体のなす空間 $\boldsymbol{Q}$

有理数全体のなす集合 $\boldsymbol{Q}$ は実数空間 $\boldsymbol{R}$ の部分集合である. これは一般にいう図形には当たらないが, 部分距離空間ではある. 有理数の稠密性 (p.241) によって, 任意の実数に対してそのいくらでも近くに $\boldsymbol{Q}$ の元が存在する. したがって, 例えば $\sqrt{2}$ に収束する有理数列 $\{p_n\}$ が存在するけれども, $\sqrt{2}$ は無理数であるから, $\{p_n\}$ は $\boldsymbol{Q}$ の点列と見たときには収束しない. すなわち点列が収束するか否かは, 空間を部分集合に制限することによって必ずしも保たれないのである. □

■ 例 1.23 ■ 多角形

平面図形としての多角形を, 自分と交わらない閉じた折れ線よりなる周および内部の点全体のなす $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合として定義する. このとき多角形はすべて同相となる. 一つの三角形 △ と任意の多角形 P との同相写像を構成すればよい.

P が三角形の場合には, P の各頂点を $\triangle$ の頂点に写すアファイン写像が同相写像となる. 一般の場合には, 適当に対角線を引くことによって P を三角形に分割する. この三角形の配置を見ながら $\triangle$ を同じ配置の三角形に分割し (図 1.17), 対応する三角形を写すアファイン写像を組み合わせれば求める同相写像が得られる.

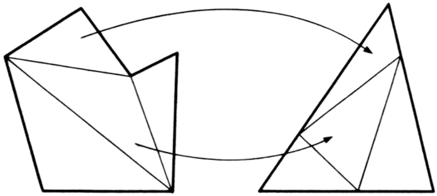


図 1.17 多角形と三角形 □

■ **例 1.24** ■ **閉円板** D^2

平面の部分集合 $D^2=\{(x,y);\ x^2+y^2\leq 1\}$ を **2 次元閉円板** と呼ぶが, これもまた三角形と同相である. 同相写像は以下のように構成される. 三角形 $\triangle$ として原点を内部に含むものをとる. $\triangle$ の周を $\partial\triangle$, D^2の周, すなわち単位円周を ∂D^2 とするとき, 写像 $\bar{\varphi}:\partial\triangle\to\partial D^2$ を $\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v})=\left(\dfrac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}},\dfrac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}}\right)$ で定義すれば, これは連続な全単射である (図1.18). 逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ は, 一つの辺の

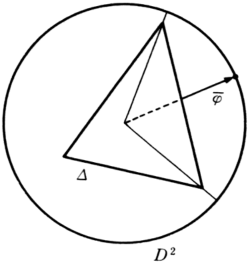


図 1.18 閉円板と三角形

方程式を $a\bar{u}+b\bar{v}=c$ とするとき, この辺の $\bar{\varphi}$ による像に属する $(\bar{x},\bar{y})$ に対しては $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{x},\bar{y})=\left(\dfrac{c\bar{x}}{a\bar{x}+b\bar{y}},\dfrac{c\bar{y}}{a\bar{x}+b\bar{y}}\right)$ で与えられることから, これも連続. した

がって $\bar{\varphi}$ は同相写像である．次に任意の $(u,v)\in\triangle$ は，周 $\partial\triangle$ 上の点 $(\bar{u},\bar{v})$ と $0\leq t\leq 1$ を満たす t を用いて $(u,v)=t(\bar{u},\bar{v})$ と表される．この t は対応する範囲で $t=\dfrac{au+bv}{c}$ で与えられ，この表示を用いて $\varphi:\triangle\to D^2$ を $\varphi(u,v)=t\bar{\varphi}(\bar{u},\bar{v})$ で定義すれば，この φ は連続写像であり，全単射となる．逆写像は，同様に $\bar{x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\bar{y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を用いて $\varphi^{-1}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,\bar{\varphi}^{-1}(\bar{x},\bar{y})$ と表されるから，これも連続写像．したがって φ が求める同相写像である．□

■ **例 1.25** ■ **球面**　(参照 例 1.7, p.8)

球面 S^2 の弧長による距離 $\tilde{d}$ と，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分距離空間と見たときの距離 d の間には $d(p,q)=2\sin\dfrac{\tilde{d}(p,q)}{2}$ の関係がある．したがって d と $\tilde{d}$ とは S^2 に同じ位相を定義する．n 次元球面 S^n の場合も同様である．□

証明は割愛するが，一般に連続的微分可能な関数 $f:\boldsymbol{R}^{n-1}\to\boldsymbol{R}$ のグラフとして与えられている部分集合 $G(f)=\{(x,y);x\in\boldsymbol{R}^{n-1},y=f(x)\}$ においては，弧長による距離 $\tilde{d}$ とユークリッドの距離 d は同じ位相を定義する (図 1.19)．しかしユークリッド空間のすべての部分集合に対して $\tilde{d}$ と d とが同じ位相を定義するわけではない．例えば平面 $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A を，原点を通る傾き $1/n$, $n=1,2,\cdots$ の直線と x-軸との和集合とする (図 1.20)．このとき $p_n=(1,1/n)$ と $p_\infty=(1,0)$ とのユークリッドの距離は $d(p_n,p_\infty)=1/n$ であるが，A 上の弧長による距離は $\tilde{d}(p_n,p_\infty)=1+\sqrt{1+(1/n)^2}$ で与えられる．したがって点列 $\{p_n\}$ は d に関して

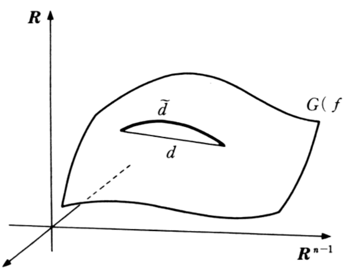


図 1.19　グラフ上の弧長による距離

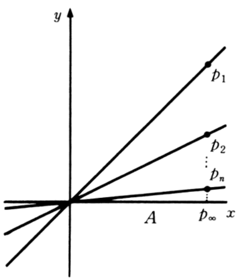


図 1.20

は p_∞ に収束するが, $\tilde{d}$ に関しては収束しない.

1.2.2 直積空間

この項では, 有限個の距離空間 X_i, $i=1,\cdots,n$ の直積空間 $X_1\times\cdots\times X_n$ に距離を導入し, その性質を調べる.

二つの距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y) に対し, 直積空間 $X\times Y$ 上の距離が

$$d\big((x,y),(x',y')\big) \;=\; d_X(x,x')+d_Y(y,y')$$

で定義される (図 1.21). これを**直積の距離**といい, この距離を与えた空間 $X\times Y$ を X と Y との**直積距離空間**あるいは単に**直積空間**と呼ぶ. ユークリッド空間

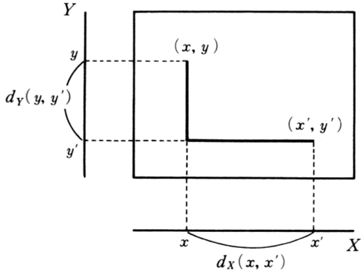


図 1.21 直積の距離

$\boldsymbol{R}^2$ を実数空間の自分自身との直積と見たときの距離は d_1 であるが, これはユークリッドの距離 d と同じ位相を定めるのであった (例 1.9, p.12). その証明において同時に, $\boldsymbol{R}^n$ の点列の収束はその各成分の収束と同値であることが示されたが, これは一般の直積空間の場合にも正しい.

【命題 1.7】 距離空間 X, Y の直積距離空間 $X\times Y$ の点列 $\{(x_n,y_n)\}$ が (x,y) に収束するのは $\{x_n\}$ が x に, $\{y_n\}$ が y に収束するとき, そのときに限る.

【系 1.8】 距離空間 X, Y, Z に対し, Z から直積距離空間 $X\times Y$ への写像 φ : $Z\to X\times Y$, $z\mapsto(\varphi_X(z),\varphi_Y(z))$ が連続となるのは $\varphi_X:Z\to X$, $\varphi_Y:Z\to Y$ がともに連続であるとき, そのときに限る.

直積集合 $X\times Y$ には, 他にも

$$\begin{aligned} d_\infty\big((x,y),(x',y')\big) &= \max\{d_X(x,x'),d_Y(y,y')\} \\ d_2\big((x,y),(x',y')\big) &= \sqrt{d_X(x,x')^2+d_Y(y,y')^2} \end{aligned}$$

によって距離を与えることもできる. ユークリッド空間の場合と同じく, 三つの距離 d, d_2, d_∞ の間に不等式 $d_\infty\le d_2\le d_1\le 2d_\infty$ が成立するから, これらはすべて同じ位相を積空間に定義する.

以上は二つの距離空間の直積についての議論であったが, 三つ以上の有限個の距離空間の直積に関してもまったく同様である. 距離空間 $(X_1,d_1),\cdots,(X_n,d_n)$ の直積空間 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 上の距離関数 d_X が, $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ に対し

$$d_X(x,y) = d_1(x_1,y_1)+\cdots+d_n(x_n,y_n)$$

で定義される. これは $X=(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$ と見て, 二つの距離空間の積から帰納的に定義された距離関数と一致している. この距離 d_X に関する点列の収束は, その各成分の X_i 上の距離に関する収束と同値である. また別の距離空間 Z から X への写像 $\varphi:Z\to X$, $\varphi(z)=(\varphi_i(z))$ が連続となるのは, 各 $\varphi_i:Z\to X_i$, $i=1,\cdots,n$ が連続となるとき, そのときに限る.

■ 例 1.26 ■ 距離関数の連続性 (参照 例 1.11, p.15)

距離関数を, 一方の変数を固定し, 一変数関数と見た場合の連続性についてはすでに述べたが, 二変数関数と見なしたときにはどうであろうか. X を距離空間, d_X をその距離関数とする. X の自分自身との直積 $X\times X$ には直積の距離 d が $d\big((x,y),(x',y')\big)=d_X(x,x')+d_X(y,y')$ で定義されていたが,

$$\begin{aligned} |d_X(x,y)-d_X(x',y')| &\le |d_X(x,y)-d_X(x',y)|+|d_X(x',y)-d_X(x',y')| \\ &\le d_X(x,x')+d_X(y,y') = d\big((x,y),(x',y')\big) \end{aligned}$$

より, もとの距離関数 d_X が直積の距離 d に関して連続なることがわかる. □

■ 例 1.27 ■ 二変数関数の連続性

距離空間 X, Y が与えられた場合, 別の距離空間 Z から直積空間 $X\times Y$ への写像 $\varphi:Z\to X\times Y$, $z\mapsto(\varphi_X(z),\varphi_Y(z))$ の連続性は各成分への写像 $\varphi_X:Z\to X$, $\varphi_Y:Z\to Y$ の連続性と同値であった (系1.8). しかしながら $X\times Y$ を定義域と

する写像の連続性は, それを X 上および Y 上の写像と見なしたときの連続性によって判定することはできない. 例えば $\boldsymbol{R}^2$ 上

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

で定義される関数は, x を固定した場合は y の, y を固定した場合は x のそれぞれ連続関数であるが, $x=y\neq 0$ のとき $f(x,y)=1/2$ であり, この条件下で $x,y\to 0$ としても $f(0,0)=0$ には収束しないから, $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数としては連続ではない.

□

■ 例 1.28 ■　ユークリッド空間から一点を除いた空間

n 次元ユークリッド空間から原点を除いた空間 $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ を考える. この空間の点は原点からの距離と方向によって定まる (図 1.22). すなわち写像 $\varphi: (0,\infty)\times S^{n-1}\to\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$, $(r,x)\mapsto rx$ は全単射である. さらに φ は連続であり, また逆写像は $\varphi^{-1}(z)=\left(\|z\|, \dfrac{z}{\|z\|}\right)$ で与えられるから, これも連続. したがって $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ は $(0,\infty)\times S^{n-1}$ と同相である.

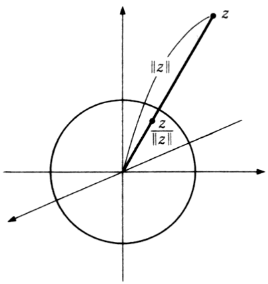


図 1.22

□

■ 例 1.29 ■　トーラス T^2

xyz-空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合として, 方程式

$$z^2+(r-2)^2=1, \quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

で定義される曲面 F を考える (図 1.23). これは xz-平面の円 $z^2+(x-2)^2=1$ の z-軸に関する回転面であり, 円 S^1 と自分自身との直積 $S^1\times S^1$ と同相となる. 同

相写像は $S^1\times S^1$ の元 $((\cos\theta,\sin\theta),\ (\cos\tau,\sin\tau))$ と曲面 F 上の点 (x,y,z) を，関係 $z=\cos\theta$, $x=r\cos\tau$, $y=r\sin\tau$, ただし $r=\sin\theta+2$ によって対応させることによって得られる．この曲面を**トーラス**あるいは**円環面**と呼び，T^2 で表す．また S^1 の n 個の直積 $\overbrace{S^1\times\cdots\times S^1}^{n}$ を $\boldsymbol{n}$ **次元トーラス**と呼び T^n で表す．

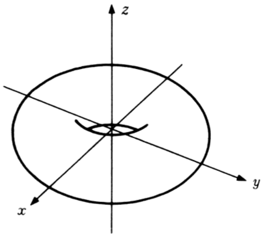


図 1.23　トーラス　□

■ 例 1.30 ■ ノルム空間の演算

ノルム空間 $(V,\|\ \|)$ における加法とスカラー倍

$$A: V\times V\to V,\quad (u,v)\mapsto u+v$$

$$S: \boldsymbol{R}\times V\to V,\quad (a,v)\mapsto av$$

を考える．これらは

$$\begin{aligned}\|(u+v)-(u'+v')\| &\le \|u-u'\|+\|v-v'\|\\ \|av-a'v'\| &\le |a|\|v-v'\|+|a-a'|\|v'\|\end{aligned}$$

によって連続である．また $v\in V$ を固定するとき，平行移動 $T_v: V\to V$, $x\mapsto x+v$ は連続であり，その逆写像が T_{-v} で与えられることから T_v は同相写像でもある．これより一般の点 $v\in V$ に関する議論を原点 $0\in V$ についての議論で置き換えることができる．これをノルム空間の**等質性**と呼ぶ．　□

■ 例 1.31 ■ 一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{R})$

実数係数の $n\times n$ 行列の全体 $M(n;\boldsymbol{R})$ は，各成分を座標と見ることによって自然に n^2次元のユークリッド空間と同一視できる．ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の元を縦ベクトルと見ることによって写像

$$M(n;\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n,\quad (M,x)\mapsto Mx$$

が定義されるが, 像 Mx の各成分は M と x の各成分の四則演算によって与えられるから, この写像は連続である.

$n\times n$ 行列 M のうち行列式 $\det M$ が 0 でないものの全体

$$GL(n;\boldsymbol{R})=\{\,M\in M(n;\boldsymbol{R})\;;\;\det M\neq 0\,\}$$

を **n 次一般線形群**と呼ぶ. $GL(n;\boldsymbol{R})$ はその名のように群をなす. すなわち二つの行列 $M,M'\in GL(n;\boldsymbol{R})$ に対して積 $MM'\in GL(n;\boldsymbol{R})$ が定義され, 結合律 $(MM')M''=M(M'M'')$ を満たす; 単位行列 $E=(\delta_{ij})\in GL(n;\boldsymbol{R})$ が存在し, 任意の $M\in GL(n;\boldsymbol{R})$ に対して $EM=ME=M$ を満たす, ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタである; 任意の $M\in GL(n;\boldsymbol{R})$ に対して逆行列 $M^{-1}\in GL(n;\boldsymbol{R})$ が定義され $MM^{-1}=M^{-1}M=E$ を満たす. 一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ は $M(n;\boldsymbol{R})$ の部分空間であるから距離空間としての構造ももっているが, 行列の積を与える写像と逆行列を与える写像

$$\begin{aligned} GL(n;\boldsymbol{R})\times GL(n;\boldsymbol{R}) &\to GL(n;\boldsymbol{R}), \quad (M,M')\mapsto MM' \\ GL(n;\boldsymbol{R}) &\to GL(n;\boldsymbol{R}), \quad M\mapsto M^{-1} \end{aligned}$$

はともにこの距離に関して連続である. これは一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ が, 後に定義する位相群としての構造をもつことを示している (参照 例 2.12, p.77). □

1.2.3 可算直積空間

有限直積空間に対しては, 三種類の距離 d, d_2, d_∞ が定義され, いずれの距離も同じ位相を直積空間に定めるのであった. これに対し無限直積空間を考える場合には, そもそも距離関数を定義する段階から, 単純に和をとったのでは必ずしも収束しないという問題が生じる. いま可算個の直積を考えることとして, (X_k,d_k), $k=1,2,3,\cdots$ を距離空間の可算族とする. まず発散の問題を回避するために, 各 d_k を同じ位相を定義する距離 d'_k であって $d'_k\leq 1$ を満たすもので置き換える. このような d'_k の存在は命題 1.3 (p.12) によって保証されている. 次に d'_k を用いて $x=(x_k), y=(y_k)\in X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$ に対し

$$d(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}d'_k\,(x_k,y_k)$$

とおくと, この関数 d は距離の公理を満たす. 実際, $d'_k(x_k,y_k)\geq 0$ より $d(x,y)\geq 0$ であり, $d(x,y)=0$ ならばすべての k について $d_k(x_k,y_k)=0$ であるから $x=y$

となる．対称性，三角不等式についても同じく各 d'_k の対称性，三角不等式より従う．これによって可算直積空間 $X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$ に距離空間としての構造がはいった．これを $X_1,\cdots,X_k,\cdots$ の**可算直積距離空間**あるいは**可算直積空間**と呼ぶ．可算直積の距離 d を定義するときの d'_k の上界 1 および係数 $\dfrac{1}{2^k}$ には格別の意味はなく，d'_k が一様に有界で，正の数 a_k を和 $\sum a_k$ が収束するようにとれば $\bar{d}(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k d'_k(x_k,y_k)$ についても次の命題が成立し，したがって $\bar{d}$ の定める可算直積空間 $X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$ の位相は d の定める位相と等しい．

【命題 1.9】　可算直積距離空間 $X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$ の点列 $\{p_n\}$, $n=1,2,\cdots$, $p_n=(p_{nk})$ が $p=(p_k)$ に収束するのは各 X_k の点列 $\{p_{nk}\}$, $n=1,2,\cdots$ が p_k に収束するとき，そのときに限る．

証明　$\{p_n\}$ が p に収束すれば，可算直積空間の距離の定義より $d'_k(p_{nk},p_k)\leq 2^k d(p_n,p)\to 0$. したがって $\{p_{nk}\}$ は p_k に収束する．逆に各 $\{p_{nk}\}$ が p_k に収束すると仮定しよう．ε を正の数とし，これに対して $\dfrac{1}{2^K}<\varepsilon$ なる K をとる．各成分 $k=1,\cdots,K$ については $\{p_{nk}\}$ が p_k に収束しているので，十分大きい N をとれば $n\geq N$ に対して $d'(p_{nk},p_k)<\varepsilon$ が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned} d(p_n,p) &= \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2^k}d'_k(p_{nk},p_k) + \sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}d'_k(p_{nk},p_k) \\ &< \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2^k}\varepsilon + \sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

任意の $\varepsilon>0$ に対して n が大きければ $d(p_n,p)<\varepsilon$ となることを示すのが目的であるが，最後の不等式において $\varepsilon'=2\varepsilon$ が最初に与えられたと考えれば，$\varepsilon=\varepsilon'/2$ に対して N を選んで，$n\geq N$ のとき $d(p_n,p)<\varepsilon'$ となることが示されている．最終的に ε の定数倍で評価を与えれば，証明は実際には完結しているのである．途中の評価を煩雑なものにするのを避けるために，最後を ε の定数倍で置き換えるこのような議論は，以降もたびたび用いる．　■

【系 1.10】　X を距離空間, $X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$ を可算直積距離空間とするとき, 写像 $\varphi: X\to X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$, $x\mapsto\varphi(x)=(\varphi_k(x))$ が連続となるのは, 各 $\varphi_k: X\to X_k$ が連続となるとき, そのときに限る.

■ 例 1.32 ■　ヒルベルト立方体　(参照 例 1.5, p.6)

数列空間 $\ell^2=\left\{x=(x_n)_{n=1,2,\cdots};\ \sum|x_n|^2<\infty\right\}$ の部分空間

$$Q=\left\{x=(x_n)_{n=1,2,\cdots};\ 0\le x_n\le\frac{1}{n}\right\}$$

を**ヒルベルト立方体**あるいは**基本体**という. ヒルベルト立方体は閉区間 $[0,1]$ の可算直積空間 $X=[0,1]^{\boldsymbol{N}}=[0,1]\times\cdots\times[0,1]\times\cdots$ と, 自然な写像 $\varphi:[0,1]^{\boldsymbol{N}}\to Q$, $x=(x_n)\mapsto\left(\dfrac{1}{n}x_n\right)$ によって同相となる. この φ は全単射であり, また逆写像 $\varphi^{-1}: y=(y_n)\mapsto(ny_n)$ の第 n 成分がすべて連続であるから, 系 1.10 によって φ^{-1} も連続. あとは φ 自身の連続性を示せば, 同相写像であることが従う. $x,y\in[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ に対して

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}x_n-\frac{1}{n}y_n\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x_n-y_n|^2$$

であり, 級数 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ が収束することから $\varepsilon>0$ に対して N をとって $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\varepsilon$ となるようにできる. この N に対し $\delta>0$ を $2^N\delta<\varepsilon$ を満たすようにとる. このとき $d(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|x_n-y_n|<\delta$ であれば, すべての n に対し $|x_n-y_n|<2^n\delta$ であり, 特に $n\le N$ ならば $|x_n-y_n|<\varepsilon$. これより $\|\varphi(x)-\varphi(y)\|^2=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\varepsilon+\varepsilon=\left(\frac{\pi^2}{6}+1\right)\varepsilon$. これは φ が連続であることを示している. □

可算直積空間 $X=X_1\times\cdots\times X_k\times\cdots$ の距離関数は重さつきの和として $d(x,y)=\sum\dfrac{1}{2^k}d'_k(x_k,y_k)$ によって定義された. したがって直積が可算個であることが重要な役割を果たしている. 個数が可算を超えた場合には, 自明な場合を除いて和が収束するように係数を定めることができず, 収束が各点収束と同値であるような距離関数が定義できないのである (参照 第 2 章章末問題 9, p.103).

ヒルベルト: David Hilbert, 1862-1943.

一方単純に上限をとった

$$\bar{d}(x,y) \ = \ \sup_k d'_k(x_k, y_k)$$

によって定義される $\bar{d}$ も距離関数の公理を満たし, X に距離空間としての構造を定義する. この定義においては直積が可算である必要はない. しかし距離 $\bar{d}$ による収束は一様収束であり, その位相は先の距離 d による各点収束の位相とは異なる. 例えば各 X_k を実数空間としたとき, 点列 $x_n = (1/2^n, 2/2^n, \cdots, k/2^n, \cdots)$ は 距離 d の下では $0 = (0, \cdots, 0, \cdots)$ に収束するが, 一様収束の距離 $\bar{d}$ の下ではいかなる点にも収束しない. 通常は各座標の収束によって点列の収束を判定できることを重く見て, 無限直積空間の距離としては d を採用する.

<まとめ>　部分距離空間および直積距離空間を定義し, 三角形, 円など通常の平面図形の位相は部分距離空間の位相であること, またユークリッド空間の位相が実数空間の直積距離空間としての位相と等しいことを述べた.

[例題]　3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の直交する単位ベクトルの対全体を $\mathcal{F}$ とおく. $\boldsymbol{R}^3$ の単位ベクトル, すなわち長さが 1 のベクトルの全体は自然に 2 次元球面 S^2 と同一視されるから, $\mathcal{F}$ は直積 $S^2 \times S^2$ の部分距離空間である.

(1)　$(u,v) \in \mathcal{F}$ に, u,v と直交する単位ベクトル w で u,v,w が右手系 (図 1.24) をなすものを対応させる写像 $\mathcal{F} \to S^2$ は連続であることを示せ.

(2)　空間 $\mathcal{F}$ は 3 次特殊直交群 $SO(3)$ と同相であることを示せ. ただし $SO(3)$ は, E を単位行列, ${}^tA$ を A の転置行列として ${}^tAA = E$ および $\det A = 1$ を満たす 3×3 行列 A 全体のなす $GL(3;\boldsymbol{R})$ の部分空間.

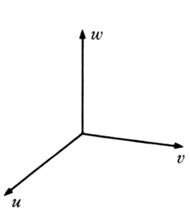


図 1.24　右手系

(解) (1)　このようなベクトル $w = w(u,v)$ は外積 $u \times v$ によって与えられる. 成分で表せば $w_1 = u_2v_3 - u_3v_2$, $w_2 = u_3v_1 - u_1v_3$, $w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$ であるから, 写

像 $(u,v)\mapsto w$ は連続である.

(2) ベクトルを縦ベクトルと見なし, 各 $(u,v)\in\mathcal{F}$ に, u, v, $w(u,v)$ を並べて得られる 3×3 行列 $A=(u,v,w)$ を対応させる写像 $\varphi:\mathcal{F}\to SO(3)$ を考える. この行列 A は, u, v, w が単位ベクトルであることと互いに直交することから ${}^tAA=E$ を, さらに u,v,w が右手系をなすことから $\det A=1$ を満たす. したがって φ は $\mathcal{F}$ から $SO(3)$ への写像であるが, $w=w(u,v)$ が u, v について連続であったから φ も連続. また行列 $A\in SO(3)$ に対して, その第一列と第二列を取り出せば, これらは直交する単位ベクトルの組である. こうして定義された連続写像 $SO(3)\to\mathcal{F}$ が φ の逆を与えるから, $\mathcal{F}$ と $SO(3)$ は同相である. ■

1.3 位　　相

距離関数は近さを表す一つの尺度であり, ユークリッド空間からの類推を容易にするなど直感的理解の助けとなるものだが, 一方においては議論がその値に縛られ煩雑となる側面もある. この節では距離から近傍, 開集合, 閉集合などを定義し, それを用いて収束, 連続などの概念を書き換える. 目的の一つは本質をとらえて議論を簡明にすることであり, もう一つは一般の空間に対して位相を定義するための導入の役割を果たすことである.

1.3.1 近　　傍

距離空間 X 上の点 p に対し, p からの距離が ε 未満の点全体のなす部分集合

$$U(p;\varepsilon) = \{x\in X\,;\,d(x,p)<\varepsilon\}$$

を p の **ε-近傍** あるいは **ε-開球**という. また適当な $\varepsilon>0$ に対して p の ε-近傍を含むような部分集合を単に p の**近傍**という (図 1.25). 定義から p の適当な近傍を含む X の部分集合はすべて p の近傍となる. p の近傍全体からなる X の部

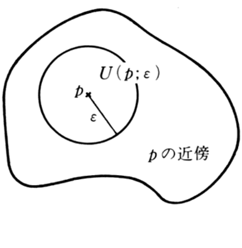


図 1.25 距離空間における近傍

分集合の族を p の**近傍系**と呼ぶ.

■ **例 1.33** ■ **区間**

実数空間の部分集合である開区間 (a,b) はそれに含まれる任意の点の近傍である. 一方閉区間 $[a,b]$ は, 内部の点, すなわち $a<x<b$ を満たす x の近傍ではあるけれども, 端点 a, b の近傍ではない. □

近傍は近さの概念を具体化したものであり, 命題の記述に際して "任意の $\varepsilon>0$" の代わりに "任意の近傍" を使うことができる. 例えば次の命題は点列の収束の定義を近傍の概念を用いて書き換えたものである. 証明は明らかであろう.

【命題 1.11】 距離空間 X 上の点列 $\{p_n\}$ が $p\in X$ に収束するための必要十分条件は, p の任意の近傍 U に対し, 十分大きい N をとれば, $n\geq N$ のとき $p_n\in U$ が成り立つこと.

写像の一点での連続性も, 近傍の概念を用いて言い換えることができる. 次の命題においては, もともと "適当な $\delta>0$ が存在して $\cdots$" と書かれた部分が近傍の定義に吸収され, 表現が簡明になっている.

【定理 1.12】 距離空間の間の写像 $\varphi: X\to Y$ が一点 $p\in X$ で連続であるための必要十分条件は, $\varphi(p)$ の Y での任意の近傍 U の φ による逆像 $\varphi^{-1}(U)$ が p の X での近傍となること.

証明　近傍の定義から $\varphi(p)$ の任意の近傍を任意の ε-近傍 $U(\varphi(p);\varepsilon)$ で置き換えてよい. このとき $U(\varphi(p);\varepsilon)$ の φ による逆像が p の近傍たる条件は, 適当な δ が存在して $U(p;\delta)\subset\varphi^{-1}(U(\varphi(p);\varepsilon))$ が成り立つこと. この条件は $d(x,p)<\delta$ ならば $d(\varphi(x),\varphi(p))<\varepsilon$ という命題にほかならないから, 求める結果を得る. ■

■ **例 1.34** ■ **ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$** (参照 例 1.3, p.3; 例 1.9, p.12)

ユークリッド空間には距離 d, d_1, d_∞ が定義されていたが, おのおのに対する点 $p\in\boldsymbol{R}^n$ の ε-近傍は図 1.26 のようになる. ε-近傍自体の形は異なっているけれども, 部分集合 A が与えられたとき, A が p の近傍である, すなわち適当な $U(p;\varepsilon)$

を含むか否かは d, d_1, d_∞ いずれについて考えても違いがない. これが三つの距離 d, d_1, d_∞ が同じ位相を定義するということであった. □

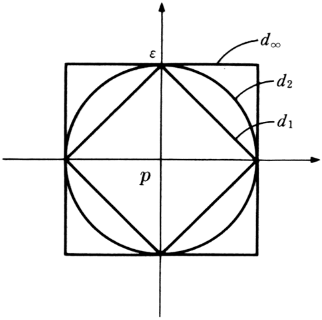


図 1.26　ユークリッド空間における ε-近傍

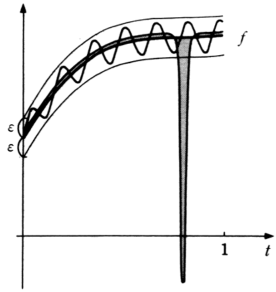


図 1.27　関数空間における ε-近傍

■ **例 1.35** ■ **連続関数の空間** $C[0,1]$　(参照 例 1.4, p.6; 例 1.10, p.13)

距離 d_∞ に関する $f \in C[0,1]$ の ε-近傍は, 各 t, $0 \leq t \leq 1$ で値 $g(t)$ と $f(t)$ との差が ε 未満であるような連続関数 g の全体である. これはそのグラフが $f-\varepsilon$ と $f+\varepsilon$ のグラフの間にはいるような g の全体といってもよい. 一方, 距離 d_1 に関する ε-近傍は $\int_0^1 |g(t)-f(t)|\,dt < \varepsilon$ なる g の全体であり, 一つ t_0, $0 \leq t_0 \leq 1$ を決めたときには, 関数値 $g(t_0)$ はどのような値でもとりうる (図 1.27). □

■ **例 1.36*** ■ $\boldsymbol{p}$ **進距離**　(参照 例 1.6, p.7)

$\boldsymbol{Z}$ の p 進距離 $d_p(n, n') = v_p(n-n')$ を考える. $\varepsilon > 0$ に対して $m = [-\log_a \varepsilon]$ とおけば, $v_p(n) \leq \varepsilon$ は n が p^m で割り切れることと同値である. ただし $[x]$ は x の整数部分を表すガウス記号であり, a は p 進付値 v_p の定義に用いた $a > 1$ なる定数である. したがって p 進距離に関する $n \in \boldsymbol{N}$ の ε-近傍は, 適当な整数 m を用いて $\{n + kp^m; k \in \boldsymbol{Z}\}$ と表される集合となる. これより, p 進距離自身は $a > 1$ によって変わるけれども, それによって導かれる位相は a によらないことがわかる. □

ガウス: Carl Friedrich Gauss, 1777-1855.

1.3.2 開 集 合

距離空間 X の部分集合は，それに属するすべての点の近傍となっているとき**開集合**，**開部分集合** あるいは**開**であると呼ばれる．開集合全体のなす X の部分集合族を**開集合系**という．

■ **例 1.37** ■ **ε-開球**

実数空間の開区間，また一般に距離空間の ε-開球 $U(x_0;\varepsilon)=\{x\,;\,d(x,x_0)<\varepsilon\}$ は開集合である．実際 $x\in U(x_0;\varepsilon)$ に対して $\delta=\varepsilon-d(x,x_0)$ をとれば，$d(x,y)<\delta$ のとき $d(y,x_0)\leq d(y,x)+d(x,x_0)<\varepsilon$．したがって $U(x;\delta)\subset U(x_0;\varepsilon)$ (図 1.28)．

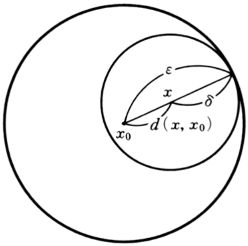


図 1.28　ε-開球　□

この例の直接の帰結として次を得る．

【命題 1.13】　距離空間 X の部分集合 U が点 p の近傍であるための必要十分条件は $p\in O\subset U$ を満たす開集合 O が存在すること．

点列の収束の近傍を用いた言い換え (命題1.11, p.38) によって，開集合を点列を用いて定義することもできる．

【命題 1.14】　距離空間 X の部分集合 O が開集合であるための必要十分条件は，任意の $p\in O$ およびこれに収束する X の任意の点列 $\{p_n\}$ に対し，適当な自然数 N をとれば $n\geq N$ に対して $p_n\in O$ が成り立つこと．

【命題 1.15】 X を距離空間, $\mathfrak{O}$ を距離から定まる X の開集合系とするとき, $\mathfrak{O}$ は以下を満たす. これを**開集合の公理**と呼ぶ.

(O_1) $X, \emptyset \in \mathfrak{O}$.

(O_2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.

(O_3) $O_\lambda \in \mathfrak{O}, \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

証明　(O_1) は定義から明らか. (O_2) について, $x \in O_1 \cap O_2$ とすれば, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ が存在して $U(x;\varepsilon_1) \subset O_1$ かつ $U(x;\varepsilon_2) \subset O_2$. したがって ε_1 と ε_2 との小さい方を ε とすれば $U(x;\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$. ($\mathrm{O}_3$) について, $x \in \bigcup O_\lambda$ ならば適当な λ_0 が存在して $x \in O_{\lambda_0}$. このとき O_{λ_0} は x の近傍であるから, O_{λ_0} を含む $\bigcup O_\lambda$ も x の近傍となる. ■

近傍は写像の一点での連続性を表現するのに使われたが, 開集合を用いれば写像の定義域全体での連続性の言い換えができる.

【定理 1.16】 距離空間 X と Y の間の写像 $\varphi : X \to Y$ が連続となるための必要十分条件は, Y の開集合の φ による逆像が常に開集合となること.

証明　φ が連続であるとする. O を Y の開集合とし, x を $\varphi^{-1}(O)$ の点とする. $\varphi(x) \in O$ より O は $\varphi(x)$ の近傍であり, また φ は x で連続であるから, 近傍による一点での連続性の言い換え (定理 1.12, p.38) によって, $\varphi^{-1}(O)$ は x の近傍. $x \in \varphi^{-1}(O)$ は任意であったから, $\varphi^{-1}(O)$ は開集合となる. 逆に任意の開集合の φ による逆像が開集合であったと仮定しよう. X の点 p に対し, $\varphi(p)$ の ε-近傍は開集合であったから, その逆像は開集合で, 特に p を含むから p の近傍. これより $\varphi(p)$ の任意の近傍の φ による逆像が p の近傍となる. したがって φ は p で連続だが, p は任意であったから φ は全空間 X で連続である. ■

【系 1.17】 距離空間 X と Y の間の写像 $\varphi : X \to Y$ が同相写像となるための必要十分条件は, φ が全単射であり, かつ φ による X の開集合系 $\mathfrak{O}_X$ の像 $\varphi(\mathfrak{O}_X)$ が Y の開集合系 $\mathfrak{O}_Y$ に一致すること.

■ 例 1.38 ■ 連続関数で定義される開集合

X を距離空間, $f:X\to\boldsymbol{R}$ を連続写像とするとき, 区間 $(0,\infty)\subset\boldsymbol{R}$ が開集合であったから $\{x;\ f(x)>0\}=f^{-1}(0,\infty)\subset X$ は開集合となる. 四則演算の連続性 (例 1.15, p.17) から, 連続関数と不等号 $>$, $<$ で定義される部分集合も開集合であり, さらに開集合の公理 (O_2) から, 有限個の条件を併記している場合も開集合となる. 例えばユークリッド空間の部分集合 $\{(x,y);\ x\sin y>\cos y\}$, $\{(x,y,z);\ 1<x^2-y^2+z^3<2, x+y<100\}$ などは開集合である. □

■ 例 1.39 ■ 離散距離空間　(参照 例 1.1, p.3)

離散距離空間 X においては, 各点 $x\in X$ の ε-近傍, $0<\varepsilon<1$, は x のみよりなる集合 $\{x\}$ である. よって部分集合 $U\subset X$ が x の近傍となるための必要十分条件は U が x を含むこと. これより離散距離空間においては任意の部分集合が開集合で, したがって離散距離空間を定義域とする任意の写像は連続である. □

■ 例 1.40* ■ 正値連続関数のなす部分集合

閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の空間 $C[0,1]$ の部分集合として $A=\{f;\ f(t)>0\}$ を考える. $C[0,1]$ の距離として d_∞ をとり, $f\in A$ に対して $\varepsilon=\inf_{0\le t\le 1}f(t)$ とおけば, $d_\infty(g,f)<\varepsilon/2$ のとき, 任意の $0\le t\le 1$ に対して $g(t)>f(t)-\varepsilon/2\ge\varepsilon/2>0$ であるから $g\in A$ となる. よって A は距離 d_∞ に関して開集合である. しかし距離として d_1 をとったときには A は開集合ではない. 関数列 $g_n(t)=-\sqrt{n}\,t^n$ は $n\to\infty$ のとき $\|g_n\|_1\to 0$ となる一方で $g_n(1)\to-\infty$ を満たす. したがって $f\in A$ にこれを加えた関数列 $\{f+g_n\}$ は, d_1 に関して f に収束するけれども, 十分大きい n について $f+g_n$ は A に属していない (図 1.29).

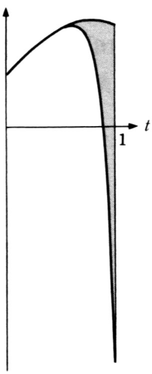


図 1.29

□

1.3.3　閉　集　合

距離空間 X の部分空間 F は, その補集合 $F^c=X\setminus F$ が開集合であるとき**閉集合**, **閉部分集合**あるいは**閉**であると呼ばれる. 閉集合全体のなす部分集合族を**閉集合系**という. 開集合の公理 (命題 1.15, p.41) から直ちに次が得られる.

【命題 1.18】 X を距離空間, $\mathfrak{F}$ を距離から定まる X の閉集合系とするとき $\mathfrak{F}$ は以下を満たす. これを**閉集合の公理**と呼ぶ.

(C$_1$) $X, \emptyset \in \mathfrak{F}$.

(C$_2$) $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$.

(C$_3$) $F_\lambda \in \mathfrak{F}, \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{F}$.

■ 例 1.41 ■ 閉区間

実数空間においては一点よりなる集合 $\{a\}$, 閉区間 $[a,b]$, $\pm\infty$ を端点とする半開区間 $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ などは, その補集合が開区間あるいは二つの開区間の和であるから閉集合である. □

■ 例 1.42 ■ 連続関数で定義される閉集合

連続写像の開集合による特徴付け (定理 1.16, p.41) から, 距離空間の間の写像が連続である必要十分条件は任意の閉集合の逆像が閉となることであることがわかる. 上の例とあわせれば, 連続関数と等号 $=$ および等号つきの不等号 $\leq, \geq$ を用いて定義される部分集合は閉集合である. 例えば p を中心とする ***ε*-閉球** $B(p;\varepsilon)=\{x\in X;\ d(x,p)\leq\varepsilon\}$ は閉集合である. 特に一点よりなる集合 $\{p\}=B(p;0)$ は閉集合であり, したがって閉集合の公理 (C$_2$) によって有限集合も閉集合である. またユークリッド空間の部分集合 $\{(x,y)\,;\,x\leq y^2\}$, $\{(x,y,z)\,;\,x=e^y-z, y^2\leq z^3\}$ なども閉集合である. □

閉集合の名前の由来は極限操作について閉じているという次の事実である. 証明は補集合に命題 1.14 (p.40) を適用することで得られるから, ここでは省略する.

【定理 1.19】 X を距離空間, F をその部分集合とする. このとき F が閉集合であるための必要十分条件は, F の点列 $\{p_n\}$ が X で収束するならばその極限が必ず F に属すること.

■ 例 1.43* ■ 非負連続関数のなす部分集合　(比較 例 1.40, p.42)

閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の空間 $C[0,1]$ の部分集合として $B=\{f;f(t)\geq 0\}$ を考えると, この部分集合は距離 d_∞ に関しても, 距離 d_1 に関しても閉集合であ

る．まず距離 d_1 について，補集合 $B^c=\{g\,;$ 適当な t に対して $g(t)<0\}$ が開集合であることを示す．$g\in B^c$ であれば，$0\le t_0\le 1$ であって $g(t_0)<0$ なるものが存在する．このとき適当な $\delta>0$ をとれば $\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(t)dt<0$. ただし t_0 が端点の場合は積分範囲を $[0,\delta]$ あるいは $[1-\delta,1]$ にとる．このとき，もし関数 $f\in C[0,1]$ が B に属していれば，$f(t)\ge 0$ より

$$d_1(f,g)\ \ge\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}|f(t)-g(t)|dt\ =\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}f(t)-g(t)dt\ \ge\ \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}-g(t)dt\ .$$

右辺は正の定まった値であるから，これを ε とおけば，g の ε-近傍は B とは共通部分をもたない．すなわち B^c は開集合で，したがって B は距離 d_1 に関して閉集合である．またノルムの単調性 (p.250) より恒等写像 $\mathrm{id}:(C[0,1],d_\infty)\to(C[0,1],d_1)$ は連続であり，距離 d_1 についての閉集合はすべて距離 d_∞ についても閉集合となる．よって部分集合 B は距離 d_∞ に関しても閉集合である．□

1.3.4　内部, 閉包, 境界

距離空間 X の部分集合 A に対し，A を近傍とするような点 p を A の**内点**と呼ぶ (図 1.30)．A の内点全体のなす部分集合を A の**内部**あるいは**開核**といい，$\mathring{A}$, A°, A^i, $\mathrm{Int}A$ などで表す．

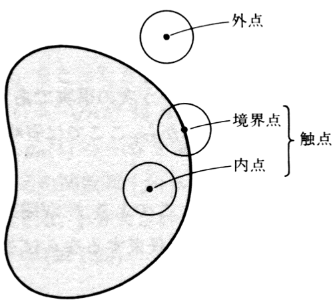


図 1.30　内点, 触点, 境界点, 外点

【命題 1.20】　部分集合 A の内部 $\mathring{A}$ は A に含まれる開集合全体の和，すなわち

$$\mathring{A}\ =\ \bigcup_{O\subset A,\ 開} O$$

であり, したがって A に含まれる最大の開集合と一致する.

証明 近傍の開集合による特徴づけ (命題 1.13, p.40) により, 点 a が A の内点であるとは $a \in O_a \subset A$ なる開集合 O_a が存在すること. したがって $\overset{\circ}{A} \subset \bigcup_{O \subset A,\ 開} O$ であるが, 一方で $O \subset A$ なる開集合 O に属する点はすべて A を近傍とするから $\overset{\circ}{A} \supset \bigcup_{O \subset A,\ 開} O$ である. ■

■ **例 1.44** ■ **区間**

閉区間 $[a,b]$ の内部は開区間 (a,b) と一致する. 半開区間 $[a,b)$, $(a,b]$ についても同様である. □

■ **例 1.45** ■ **ε-閉球**

ユークリッド空間においては, ε-閉球 $B(p;\varepsilon)=\{x \in X;\ d(x,p) \leq \varepsilon\}$ の内部は ε-開球 $U(p;\varepsilon)=\{x; d(x,x_0)<\varepsilon\}$ と一致する. しかし一般の距離空間においてはこれは必ずしも正しくない. 例えば二点以上を含む離散距離空間 X において, $p \in X$ を中心とする ε-閉球, $\varepsilon=1$ を考えれば, これは全空間 X と一致する. 一方 ε-開球は p のみよりなる集合であるから X の内部 $\overset{\circ}{X} = X$ とは異なる. □

点 p の任意の近傍が部分集合 A と共通点をもつとき, p を A の**触点**と呼ぶ (図 1.30). これは A の点列で p に収束するものが存在することと同値である. A の触点全体のなす X の部分集合を A の**閉包**あるいは**触集合**といい, $\overline{A}$, A^a, A^b, ClA などで表す. A の閉包は定義から, A の補集合 $A^c = X \backslash A$ の内部の補集合と一致する. すなわち

$$\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c$$

であり, 命題 1.20 より次が従う.

【命題 1.21】 部分集合 A の閉包 $\overline{A}$ は A を含む閉集合全体の共通部分, すなわち

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A,\ 閉} F$$

であり, したがって A を含む最小の閉集合と一致する.

■ 例 1.46 ■ 対角化可能な行列

2 次正方行列全体のなす集合 $M(2;\boldsymbol{R})$ を 4 次元ユークリッド空間と同一視し，実数の範囲で対角化可能な行列の全体のなす部分集合 $\varDelta$ の閉包を考える．実数の範囲で対角化できるためには固有値は実数でなければならないから，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\varDelta$ に対し，その固有多項式 $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$ は実根をもつ．したがって $(a+d)^2-4(ad-bc)\geq 0$．逆にこの不等式を満たす，すなわち実固有値をもつ行列の全体を D と書けば，これは $M(2;\boldsymbol{R})$ の閉部分集合である．また任意の $A\in D$ に対し，これに近い A' であって $(a'+d')^2-4(a'd'-b'c')>0$ を満たすものをとることができる．このような A' は異なる実固有値をもち，したがって対角化可能であるから $D\subset\overline{\varDelta}$．すなわち求める閉包 $\overline{\varDelta}$ は実固有値をもつ行列の全体 D と一致する．□

■ 例 1.47* ■ 等差数列で与えられる部分集合　(参照例 1.6, p.7)

整数全体 $\boldsymbol{Z}$ のなかで公差 s の等差数列によって与えられる部分集合 $H=\{x_k=x_0+ks;k\in\boldsymbol{Z}\}$ を考える．$\boldsymbol{Z}$ の通常の位相のもとでは，任意の部分集合が閉集合であるから，H の閉包 $\overline{H}$ は H と一致する．一方，$\boldsymbol{Z}$ に p 進距離 d_p を入れた場合には，H は必ずしも閉集合ではない．公差 s と p とが互いに素である場合，任意の自然数 n に対し，s と p^n とはまた互いに素となる．よって任意の $x\in\boldsymbol{Z}$ に対し $x-x_0=ks+k'p^n$ なる整数 k, k' が存在するが (ユークリッドの互除法)，このとき $d_p(x,x_k)=v_p(k'p^n)\leq a^{-n}$ より x は H の触点である．したがって $\overline{H}=\boldsymbol{Z}$．また公差 s が p と互いに素な s' を用いて $s=s'p^m$ と表されるときには，x_k-x_0 は常に p^m で割り切れるから $\overline{H}$ は $x_0+p^m\boldsymbol{Z}=\{x_0+p^m\ell;\ell\in\boldsymbol{Z}\}$ に含まれる．逆に $x\in x_0+p^m\boldsymbol{Z}$ および任意の自然数 n に対し，$(x-x_0)/p^m=ks'+k'p^n$ を満たす整数 k, k' が存在することから，結局 $\overline{H}=x_0+p^m\boldsymbol{Z}$ が成立する．□

A の触点であって，内点でないものを**境界点**という (図 1.30)．A の境界点全体のなす X の部分集合を A の**境界**といい，$\dot{A}$, A^f, FrA, ∂A などで表す．境界は閉包と内部の差，すなわち

$$\dot{A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

であるから閉集合である．

A の閉包 $\overline{A}$ に属さない点 p を A の**外点**と呼ぶ (図 1.30). この条件は A と共通部分をもたないような p の近傍が存在することと同値である. 外点全体のなす集合を A の**外部**といい, A^e で表す. 外部は補集合の内部, すなわち

$$A^e = (A^c)^\circ$$

であるから, 全空間 X は集合としては, 部分集合 A の内部, 境界, 外部の非交叉和として表される.

$$X = \overset{\circ}{A} \sqcup \dot{A} \sqcup A^e .$$

■ 例 1.48 ■ 連続関数で定義された集合

連続関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ によって定義された集合 $A = \{x; f(x) \geq 0\}$ を考えると, ほとんどの場合その内部は $\{p; f(p) > 0\}$ で与えられる. 例えば $\mathrm{Int}\{(x,y); x-y^2 \geq 0\} = \{(x,y); x-y^2 > 0\}$. ただしこれは $f(p) = 0$ を満たす p の近くに必ず $f(q) < 0$ なる点 q が存在するという条件の下で成り立つことであり, 正しくない場合もある. 例えば $\{(x,y); x^2+y^2 \geq 0\}$ は全平面であり, その内部は $\{(x,y); x^2+y^2 > 0\} = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}$ とは一致しない. 閉包をとる操作についても同様の注意が必要である (参照 章末問題 7, p.53). □

1.3.5　孤立点, 集積点, 稠密性

距離空間 X の部分集合 A に対し, A に属する点 p が A の**孤立点**であるとは, p の適当な近傍と A との共通部分が p のみからなるときをいう. 逆に X の点 q が A の**集積点**であるとは, q の任意の近傍が q 以外の A の点を含むときをいう (図 1.31). したがって A に属する点は A の孤立点であるか, あるいは集積点であるかのいずれかである. 点 q が A の集積点であれば, q の任意の近傍 U に対

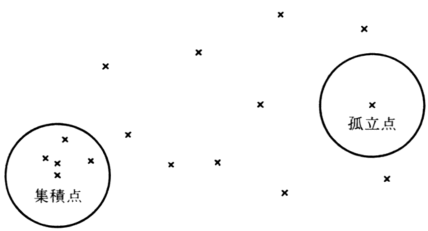


図 1.31　孤立点と集積点

してそれに含まれる $p_1 \in A$ をとることができる．このとき $U \setminus \{p_1\}$ は再び q の近傍であるから，それに含まれる $p_2 \in A$ が存在する．次には $U \setminus \{p_1, p_2\}$ をとり，この操作を繰り返す．そうすると結局 U に属する A の点が無限個存在することがわかる．すなわち距離空間においては q が A の集積点たる条件は，q の任意の近傍が A の元を無限個含むことと等しい．最後に集積点は A の点だけでなく，X の点に対して定義されていることに注意する．A に属していない点 q に対しては，これが A の集積点であるという条件と A の触点であるという条件は等しいから，結局 A の触点全体，すなわち A の閉包 $\overline{A}$ は A の孤立点および集積点全体のなす集合である．例えば実数空間の部分集合として $A=\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots\right\}$ を考えれば A のすべての元は孤立点で，集積点は $0 \notin A$ のみである．

距離空間 X の部分集合 A が**稠密**とは A の閉包が X に一致するとき，すなわち任意の点 $x \in X$ の任意の近傍に A の点が含まれるときをいう．逆に A の閉包の内部が空集合となるとき，A を**疎**な部分集合という．

■ 例 1.49 ■ 整数全体のなす集合 $\boldsymbol{Z}$ と有理数全体のなす集合 $\boldsymbol{Q}$

実数空間 $\boldsymbol{R}$ の中で，整数全体のなす部分集合 $\boldsymbol{Z}$，有理数全体のなす部分集合 $\boldsymbol{Q}$ を考える．$\boldsymbol{Z}$ の各点は孤立点であり，また $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ で疎．一方，有理数の稠密性 (p.241) より $\boldsymbol{Q}$ の各点は集積点で，$\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ で稠密となる．□

■ 例 1.50 ■ 閉集合および開集合の境界

F を距離空間の閉部分集合とするとき，その境界 $\dot{F}$ は常に疎である．任意の $p \in \dot{F}$ に対し，境界の定義から p のいくらでも近くに F^c の点 x が存在する．一方で F^c は開集合であるから x の近くの点はすべて F^c の内部に属する．すなわち p は $\dot{F}$ の内点ではない．したがって $\dot{F}$ の内部は空集合で，$\dot{F}$ が閉集合であることとあわせて $\dot{F}$ が疎であることがわかる．開集合については，境界が補集合の境界と一致することから，境界はやはり疎である．□

■ 例 1.51 ■ カントール集合 C

閉区間 $[0,1]$ の部分集合 C を以下の手順で定義する．まず $C_0=[0,1]$ とおく．次に C_0 を3等分し，そのうちの中央の 1/3-開区間を除いた集合を C_1 とする．す

カントール: Georg Cantor, 1845-1918.

なわち $C_1=\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$. さらに C_1 に属する各部分区間 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ をおのおの3等分し, そのうちの中央の1/3-開区間を除いた集合を C_2 とする. すなわち $C_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$. これを繰り返して集合の減少列 C_n, $n=0,1,2,\cdots$ を定め, 最後にその共通部分として C を定義する (図 1.32). この

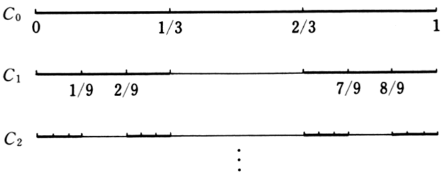


図 1.32　カントール集合

C を**カントール集合**あるいは**カントールの3進集合**と呼ぶ. カントール集合は, 定義から, 3進展開において0および2だけで表現できる $[0,1]$ の実数全体のなす集合 $\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\ ;\ a_n=0,2\right\}$ と等しい. さて各 C_n は閉区間の有限和であることから閉集合であり, その共通部分である C も閉集合である. 次に C_n に属する各閉区間の長さが $1/3^n$ であることから, 任意の $x\in C_n$ に対し, x から距離 $1/3^n$ 以内に C_n に属さない点が存在する. したがって C の任意の点のいくらでも近くに補集合 C^c の点が存在するから C^c は稠密であるが, C は閉集合であったから C は疎である. 一方で任意の $x\in C$ に対し, x の属する C_n の長さ $1/3^n$ の区間の端点を x_n とすれば, x_n は C に属し, かつ $n\to\infty$ のとき $x_n\to x$. ここでもし x が C_n の区間の端点であっても, x_n としてもう片方の端点をとることができるから, $x_n\neq x$ としてよい. したがって x は C の集積点である. このように, 任意の元が集積点であるような空間を**完全**と呼ぶ. □

■ 例 1.52 ■　加法的関数

実数上定義された連続関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が, 任意の $x,y\in\boldsymbol{R}$ に対して $f(x+y)=f(x)+f(y)$ を満足するとき, f は線形関数であることを証明する. まず $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ より $f(0)=0$ である. 次に $a=f(1)$ とおくと, 自然数 $n\in\boldsymbol{N}$ での値は $f(n)=f(\overbrace{1+\cdots+1}^{n})=nf(1)=an$. また $\frac{1}{m}$, $m\in\boldsymbol{N}$ での値は

$f(1)=f\left(\overbrace{\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}^{m}\right)=mf\left(\frac{1}{m}\right)$ より $f\left(\frac{1}{m}\right)=a\frac{1}{m}$. したがって正の有理数 $p=\frac{n}{m}$ に対して $f(p)=f\left(\overbrace{\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}^{n}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=ap$. 負の有理数 $-p$ については $f(-p)+f(p)=f(0)=0$ より $f(-p)=a(-p)$. すなわち任意の有理数 $p\in\boldsymbol{Q}$ に対して $f(p)=ap$ が成立する. 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ が実数空間 $\boldsymbol{R}$ で稠密であることから, 任意の実数 $x\in\boldsymbol{R}$ に対して, x に収束する有理数列 $\{p_k\}$ が存在する. このとき等式 $f(p_k)=ap_k$ において $k\to\infty$ なる極限をとれば, 関数 f の連続性より $f(x)=ax$ が成り立つ. したがって f は線形関数である. □

距離空間は稠密な可算部分集合をもつとき**可分**と呼ばれる. 有理数の稠密性から実数空間は可分であり, また応用上重要なほとんどの距離空間は可分である.

■ 例 1.53 ■ ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の可分性

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $\boldsymbol{Q}^n$ は, 可算集合の有限直積であるから可算であり, また各 $\boldsymbol{Q}$ が $\boldsymbol{R}$ で稠密なることから $\boldsymbol{R}^n$ で稠密となる. □

■ 例 1.54* ■ 連続関数のなす空間 $C[0,1]$ の可分性

$C[0,1]$ に $d_\infty(f,g)=\|f-g\|_\infty$ から定まる位相を入れた空間が可分であることを示す. 証明の際, 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の一様連続性を用いる. これはコンパクト空間の章で示される事実ではあるが (定理 4.6, p.131) 一変数関数については周知であろう. 自然数 N に対し, 各部分区間 $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$, $k=0,\cdots,N-1$ 上では 1 次式で表される連続関数の全体を P_N とおく. さて $f(t)$ を $[0,1]$ 上の連続関数, ε を任意の正の数とする. $f(t)$ の一様連続性から適当な $\delta>0$ をとれば, $|t-t'|<\delta$ のとき $|f(t)-f(t')|<\varepsilon$ が成立する. N を $1/\delta$ より大きく選び, $p(t)$ を $p\left(\frac{k}{N}\right)=f\left(\frac{k}{N}\right)$ を満たす P_N の元とする (図 1.33). 任意の $0\leq t\leq 1$ に対し, それに一番近い $\frac{k}{N}$ を t_0 とおく. このとき $|t-t_0|<\frac{1}{N}<\delta$ であり, また $|p(t)-p(t_0)|\leq\left|p\left(t_0\pm\frac{1}{N}\right)-p(t_0)\right|=\left|f\left(t_0\pm\frac{1}{N}\right)-f(t_0)\right|<\varepsilon$ であるから

$$|f(t)-p(t)| \leq |f(t)-f(t_0)|+|f(t_0)-p(t_0)|+|p(t)-p(t_0)| < \varepsilon+0+\varepsilon = 2\varepsilon .$$

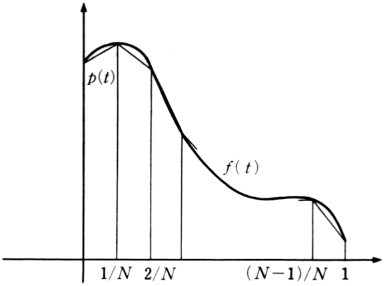


図 1.33

次に P_N に属する関数のうち, 分点での値 $p\left(\frac{k}{N}\right)$ が有理数であるような $p(t)$ の全体を Q_N, その和集合 $\bigcup_N Q_N$ を Q とおく. Q_N の元は分点 $\frac{k}{N}$ での値で決まるから, Q_N は可算, したがって Q も可算集合である. また関数 $f \in C[0,1]$ に対して上で構成した $p \in P_N$ について, 各分点 $\frac{k}{N}$, $k=0,\cdots,N$ での値を ε 未満で近似するような $q \in Q_N$ をとれば, $\|p-q\|_\infty < \varepsilon$ より $\|f-q\|_\infty \leq \|f-p\|_\infty + \|p-q\|_\infty < 3\varepsilon$. これは $Q=\bigcup_N Q_N$ が $C[0,1]$ で稠密なることを示している.

その他の p 次ノルム $\|\ \|_p$ の定める距離 d_p については, ノルムの単調性 (p.250) より $d_p(f,g) \leq d_\infty(f,g)$ が成り立つから, $\mathrm{id} : (C[0,1], d_\infty) \to (C[0,1], d_p)$ は連続で, したがって d_p に関する開集合はすべて距離 d_∞ に関する開集合でもある. よって同じ部分集合 Q が, 距離 d_p による位相に関しても稠密となる.

関数空間 $C[0,1]$ が可分であることには, 定義域 $[0,1]$ が有界閉集合であることが大きく寄与している. 定義域として実数空間 $\boldsymbol{R}$ をとり, その上の有界連続関数の全体 $B(\boldsymbol{R})$ を考えれば, $B(\boldsymbol{R})$ はノルム $\|f\| = \sup_{t \in \boldsymbol{R}} |f(t)|$ によってノルム空間となるが, 可分ではない. 実際, 任意の写像 $a : \boldsymbol{N} \to \{0,1\}$, $n \mapsto a_n$ に対し, 有界連続関数 $f_a : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ であって $f_a(n) = a_n$ を満たすものが存在する. もし $a \neq a'$ ならば, 適当な $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|f_a(n) - f_{a'}(n)| = 1$ であるから, 各 f_a を中心とした 1/2-開球 $U(f_a; 1/2)$ は互いに共通部分をもたない. このような開球は写像 $a : \boldsymbol{N} \to \{0,1\}$ の濃度, すなわち連続濃度 $\mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}}$ だけ存在するから, $B(\boldsymbol{R})$ は可分ではありえない. □

＜まとめ＞　距離空間における一点の ε-近傍および一般の近傍を定義し, これから開部分集合と閉部分集合の概念を導いた. 距離空間上の関数あるいは写像の連続性は, 点列の代わりに近傍と開集合を用いることによって表現することができる. また距離空間の部分集合が与えられたとき, 全体空間の点を部分集合との相対的な位置によって, 内点, 外点, 境界点のいずれかに分類し, それによって部分集合の内部, 閉包, 境界を定義した.

［例題］　実数 θ に対して, $T=\{e^{2\pi n\theta\sqrt{-1}}; n\in\boldsymbol{N}\}$ で与えられる複素数空間 $\boldsymbol{C}$ の部分集合の閉包 $\overline{T}$ を決定せよ.

（解）　実数 θ が有理数であるか, 無理数であるかによって場合を分ける. θ が有理数のときは, 指数関数 e^z が周期 $2\pi\sqrt{-1}$ をもつことから A は有限集合であり, したがって $\overline{T}=T$. θ が無理数の場合, $n\neq m$ に対して $e^{2\pi n\theta\sqrt{-1}}\neq e^{2\pi m\theta\sqrt{-1}}$ であるから, T は無限集合. また各 $e^{2\pi n\theta\sqrt{-1}}$ は単位円 $S^1=\{z\in\boldsymbol{C}; |z|=1\}$ 上にあるから, $\overline{T}\subset S^1$. 単位円を 1 を最初の端点として N個の弧 $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \cdots, \widehat{A_N}$ に等分すれば, T が無限集合であることから, いずれかの弧 $\widehat{A_i}$ は T の元を少なくとも二つ含む (**ディリクレの抽出し論法**). すなわち $e^{2\pi n\theta\sqrt{-1}}, e^{2\pi n'\theta\sqrt{-1}}\in\widehat{A_i}$ なる $n, n'\in\boldsymbol{Z}$, $n>n'$ が存在する (図 1.34). これらの点を角 $2\pi n'\theta$ だけ負の向きに回転すると, 一方は 1 に, もう一方は $e^{2\pi(n-n')\theta\sqrt{-1}}$ に写されるから, この $e^{2\pi(n-n')\theta\sqrt{-1}}$ は $\widehat{A_1}$ あるいは $\widehat{A_N}$ に含まれる. そうすると点列 $e^{2\pi k(n-n')\theta\sqrt{-1}}$,

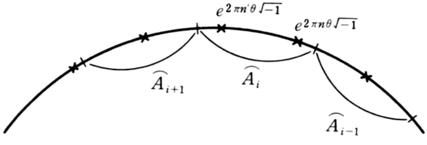


図 1.34　無理数回転

$k=1,2,\cdots$ は単位円 S^1 上を $\widehat{A_1}$ よりも小さい長さで刻んでいくから, これよりも長さの大きい弧は必ずどれかの $e^{2\pi k(n-n')\theta\sqrt{-1}}$ を含む. 分割の数 N は任意であったから T は S^1 において稠密である. すなわち $\overline{T}=S^1$. この事実を**ヤコ**

ディリクレ: Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859.

ビの定理と呼ぶ. ■

章 末 問 題

1. 空間 X 上に距離関数 d が与えられているとき, 新しい距離 d' を次で定義する.

$$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

(1) d' が距離の公理を満たすことを確認せよ.

(2) d と d' とは X 上に同じ位相を定めることを示せ.

2. 連続関数の空間 $C[0,1]$ 上定義された実数値関数

$$I: C[0,1]\to \boldsymbol{R},\quad I(f)=\int_0^1 f(t)dt$$

は d_1, d_∞ どちらに関しても連続であることを示せ.

3. 連続関数の空間 $C[0,1]$ の p 次ノルムと q 次ノルムは $p\neq q$ のとき異なる位相を $C[0,1]$ に定義することを示せ.

4. 数列空間 ℓ^p, $1\leq p\leq\infty$ を

$$\begin{aligned}\ell^p &= \{x=(x_n)_{n=1,2,\cdots};\ \textstyle\sum |x_n|^p<\infty\},\quad 1\leq p<\infty\\ \ell^\infty &= \{x=(x_n)_{n=1,2,\cdots};\ \sup|x_n|<\infty\}\end{aligned}$$

で定義するとき以下を示せ.

(1) ℓ^p は p-次ノルム $\|x\|_p=\left(\sum|x_n|^p\right)^{1/p}$ に関してノルム空間となる. ただし $x\in\ell^\infty$ に関しては $\|x\|_\infty=\sup|x_n|$ とする.

(2) $p<q$ に対して $\ell^p\subsetneq\ell^q$.

5. 素数 p, q が異なれば, p 進距離と q 進距離は異なる位相を $\boldsymbol{Z}$ に定めることを示せ.

6. 閉区間 $[0,1]$ 上の, リプシッツ定数 K をもつリプシッツ連続関数全体の空間を $\mathrm{Lip}_K[0,1]$ とし, $K>0$ についての和を $\mathrm{Lip}[0,1]=\bigcup_{K>0}\mathrm{Lip}_K[0,1]$ とおく. これらはいずれも連続関数全体の空間 $C[0,1]$ の部分空間であるから, 距離 d_1 および d_∞ を制限することによって部分距離空間と見なすことができる.

(1) d_1 と d_∞ が定める $\mathrm{Lip}_K[0,1]$ 上の位相は等しいことを示せ.

(2) d_1 と d_∞ が定める $\mathrm{Lip}[0,1]$ 上の位相は異なることを示せ.

7. $\boldsymbol{R}^2$ 上の可微分関数 f が, $f(p)=0$ なる任意の点 p において $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p)\neq 0$ あるい

ヤコビ: Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851.

は $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ を満たすとする．このとき $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $\{p; f(p) \geq 0\}$ の内部は $\{p; f(p) > 0\}$ で，境界は $\{p; f(p) = 0\}$ で与えられることを示せ．

8. X, Y を距離空間，$X \times Y$ をその積距離空間とする．$U \subset X$, $U' \subset Y$ がともに開集合であれば，積 $U \times U'$ も $X \times Y$ の開集合となる．また $F \subset X$, $F' \subset Y$ がともに閉集合であれば，積 $F \times F'$ も $X \times Y$ の閉集合となる．これを示せ．

9. ノルム空間 $(V, \|\ \|)$ において，一直線上にある V の元の三組全体のなす集合は $V \times V \times V$ の閉部分集合であることを示せ．ここで直線とは，適当な $x, y \in V$ を用いて $L = \{(1-t)x + ty;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ と表される V の部分集合をさす．

10. 離散空間 $A = \{0, 1\}$ の可算直積距離空間 $X = A \times \cdots \times A \times \cdots$ を考える．

(1) 部分集合 $F \subset \overbrace{A \times \cdots \times A}^{K}$ を用いて $U = F \times A \times \cdots$ と書ける U は開集合であることを示せ．

(2) 上の (1) で与えた形でない開集合が存在することを示せ．

11. 数列空間 ℓ^∞ の，収束する数列全体のなす部分空間を ℓ_{conv} で表す (参照問 4)．

(1) ℓ_{conv} は ℓ^∞ の閉集合であることを示せ．

(2) 関数 $\ell_{\mathrm{conv}} \to \boldsymbol{R}$, $x = (x_n) \mapsto \lim x_n$ は連続であることを示せ．

(3) 上の (2) で与えた連続関数は ℓ^∞ 上の連続関数に拡張するか．

12. 2次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合について以下を求めよ．

(1) L_n を原点を通る傾き n の直線とするとき，$A = \boldsymbol{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{n=1,2,\cdots} L_n \right)$ の内部，閉包，境界．

(2) $B = \left\{ \left(r_N \cos \dfrac{2\pi k}{N}, r_N \sin \dfrac{2\pi k}{N} \right);\ k = 1, 2, \cdots, N,\ N = 1, 2, \cdots \right\}$ の孤立点と集積点．ただし $r_N = 1 - \dfrac{1}{N}$ とする．

13. n 変数多項式 $p(z)$ が定数 0 でなければ，その零点集合 $A = \{z \in \boldsymbol{C}^n;\ p(z) = 0\}$ は疎な閉集合であることを示せ．ただし $\boldsymbol{C}^n$ には通常の位相を入れる．

2

位相空間

距離空間の章では点列を用いて写像の連続性を定義したが, 近傍の概念を用いて連続性を再定義することが可能であった. すなわち, 空間の各点に対して近傍が与えられていれば, 写像の連続性を記述することができる. このように, 空間に対して近傍系あるいは開集合系を最初に定め, これによって写像の連続性を定義しようというのが, 一般位相の理論である. 距離空間を位相空間に一般化する利点としては, 距離によって記述できない位相を扱うことが可能になること, 枠組みを広げることによって逆に議論が簡明になることがある. 前者の典型例は商空間であり, これを定式化することによって, 種々の位相空間の構成が可能になるとともに, 異なる対象に同じ名前をつけて同一視するという数学の強力な手法を位相の場にもち込むことができる. 後者については, すでに開集合を用いた連続性の言い換えなどが距離空間においても有効であったが, このような直接的な簡素化だけではなく, 空間を扱うための新しい概念, 例えばコンパクト性, 連結性などの導入という広い意味での議論の簡略化が特に大きい意味をもつ.

2.1　位 相 構 造

空間に対し, その部分集合が開集合であるか否かを最初に決め, そのようにして与えられた開集合系をもとにして, 各点の近傍系および空間の間の写像の連続性を記述する. 閉集合, 内部, 閉包, 境界, 稠密性など, 距離空間の章と重複する部分については定義を繰り返すに留めた. それ以外に, 基本近傍系, 開集合系の基および準基, 第一および第二可算公理などについて述べる. 例示する空間は距

離空間でないものが多く, なじみにくいが, これはやむをえないであろう.

2.1.1　位　　相

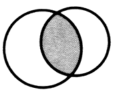
距離関数を用いずに一般の空間に近さの概念を導入する公理的方法として, ハウスドルフによる近傍系の方法, クラトウスキによる閉包作用素の方法, ブルバキによる開集合系を用いる方法が知られている. 距離空間に対しては距離から近傍系を導入し, それを用いて開集合, 閉集合を定義したが, この節では最初に開集合系を与えて, 近傍, 閉集合を定義するブルバキの方法に従う.

空間 X に対し, その部分集合の族 $\mathfrak{O}$ で次の公理を満たすものを指定することを, X に**位相を入れる**, **位相を定める**, **位相構造を入れる**などという (図 2.1).

(O_1)　$X, \emptyset \in \mathfrak{O}$.

(O_2)　$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$　ならば　$O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$.

(O_3)　$O_\lambda \in \mathfrak{O}, \lambda \in \Lambda$　ならば　$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.


(O_2)

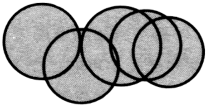

(O_3)

図 2.1　開集合の公理

この三条件を**開集合の公理**と呼び, $\mathfrak{O}$ を**開集合系**あるいは**位相**, $\mathfrak{O}$ の各元を**開集合**あるいは**開部分集合**という. 位相という言葉は, もともとは空間における近さ, あるいはそれから派生する種々の概念を一括してさすものであるが, 開集合系をその代表と見てこのような使い方をするのである. 開集合系 $\mathfrak{O}$ が与えられた空間 X, すなわち対 $(X, \mathfrak{O})$ を**位相空間**あるいは単に**空間**と呼ぶ. 開集合系 $\mathfrak{O}$ について言及する必要がない場合, あるいはどの開集合系を考えているかが明らかである場合には, 単に位相空間 X という.

距離空間 (X, d) に対しては, 近傍を経由してすでに開集合の概念が与えられ

ハウスドルフ: Felix Hausdorff, 1868-1942.
クラトウスキ: Kazimierz(=Casimir) Kuratowski, 1896-1980.
ブルバキ: Nicolas Bourbaki.

ている. この場合, 部分集合 $O \subset X$ が開集合であることを, 任意の $x \in O$ に対して適当な $\varepsilon_x > 0$ が存在して x の ε_x-近傍 $U(x;\varepsilon_x)$ が O に含まれることとして定義するのであった. このように定められた開集合全体のなす族 $\mathfrak{O}_d$ は上の公理を満たす (命題 1.15, p.41). これを距離によって**定められた位相**あるいは**導かれた位相**と呼ぶ. 空間 X 上の二つの距離関数 d, d' が X に同じ位相を定めるというのは, この定義のもとでは言葉どおりの意味となる (p.11).

■ 例 2.1 ■ 密着位相, 離散位相

集合 X の部分集合族で開集合の公理を満たすもののうち, 最も小さい, すなわち開集合の少ないものは, X 自身および空集合よりなる族 $\{X, \emptyset\}$ である. この位相を**密着位相**, 位相空間 $(X, \{X, \emptyset\})$ を**密着空間**と呼ぶ. 逆に最も大きい, すなわち開集合の多いものは, 開集合系として X のべき集合, すなわち部分集合全体のなす集合 $\mathfrak{P}(X)$ をとった場合である. この位相を**離散位相**, 位相空間 $(X, \mathfrak{P}(X))$ を**離散空間**と呼ぶ. 離散位相は離散距離から導かれる位相である (例 1.1 , p.3). □

■ 例 2.2 ■ ザリスキ位相

複素数の全体 $\boldsymbol{C}$ において, 任意の有限集合の補集合および空集合からなる族 $\mathfrak{O}$ を開集合系とする位相を**ザリスキ位相**と呼ぶ. この集合族 $\mathfrak{O}$ が開集合の公理を満たすことは容易に確かめられる. ザリスキ位相のもとでは任意の空でない開集合 $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}$ に対して $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ が成り立つ. したがってザリスキ位相を導くような距離関数は存在しない. □

X を位相空間, すなわち開集合系 $\mathfrak{O}$ が与えられた空間とする. X の点 p に対して X の部分集合 U が p の**近傍**であるとは, 開集合 O であって $p \in O \subset U$ を満たすものが存在するときをいう (図 2.2). 点 p の近傍全体のなす X の部分集合族を p の**近傍系**と呼ぶ. 距離空間の場合には, 適当な ε-近傍を含むというもとの定義と, 開集合を経由したこの定義とは同値であった (命題 1.13, p.40). 開集合であるような近傍を**開近傍**と呼ぶが, U が p の開近傍であることと, U が p を含む開集合であることとは同値である.

ザリスキ: Oscar Zariski, 1899-.

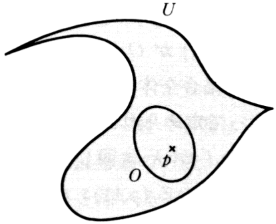


図 2.2 位相空間における近傍

【定理 2.1】 X を位相空間, 各点 $p\in X$ の近傍系を $\mathfrak{U}(p)$ で表せば以下が成立する (図 2.3). これを**近傍系の公理**と呼ぶ.

(U_1) $\mathfrak{U}(p)\neq\emptyset$.

(U_2) 任意の $U\in\mathfrak{U}(p)$ に対して $p\in U$.

(U_3) $U, V\in\mathfrak{U}(p)$ ならば $U\cap V\in\mathfrak{U}(p)$.

(U_4) $U\in\mathfrak{U}(p), U\subset V$ ならば $V\in\mathfrak{U}(p)$.

(U_5) $U\in\mathfrak{U}(p)$ ならば, 適当な $W\subset U$, $W\in\mathfrak{U}(p)$ が存在して, 任意の $q\in W$ に対して $U\in\mathfrak{U}(q)$.

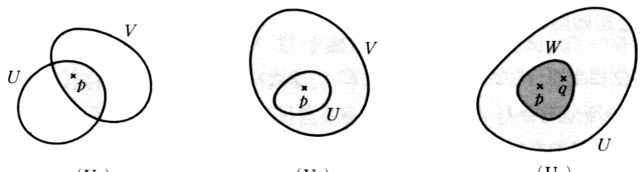


図 2.3 近傍系の公理

証明 (U_1), (U_2), (U_4) は定義より明らかであり, (U_3) は近傍の定義および開集合の公理 (O_2) より成り立つ. (U_5) については $p\in O\subset U$ なる開集合 O をとれば, 各 $q\in O$ について $O\in\mathfrak{U}(q)$ であり, (U_4) より $U\in\mathfrak{U}(q)$ であるから, $W=O$ が要求を満たす. ■

この命題は位相空間における近傍系の性質を示すものであるが, 逆に空間 X の各点 p に対し X の部分集合族 $\mathfrak{U}(p)$ が定義され, かつ近傍系の公理 (U_1)~(U_5) を満たすならば, これを用いて X の位相を構成することができる. 具体的には X の部分集合 O が開集合であることを, 任意の $x \in O$ に対して O が x の近傍であることとして定義するのである. こうして定められた開集合系は開集合の公理を満たし, またその位相から近傍系を再定義したとき, それは最初に与えた近傍系と一致する. 証明の詳細は読者に委ねる.

位相空間の部分集合と点に関するその他の概念は開集合と近傍から距離空間の場合と同様に定義されるが, 念のため以下で繰り返す (参照 1.3 節, p.37).

X の部分集合 F が**閉集合**あるいは**閉部分集合**であるとは, その補集合 $F^c = X \setminus F$ が開集合であるときをいう. 閉集合の全体からなる X の部分集合族を $\mathfrak{F}$ で表せば, これは次の**閉集合の公理**を満足する (図 2.4).

(C_1) $X, \emptyset \in \mathfrak{F}$.

(C_2) $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$.

(C_3) $F_\lambda \in \mathfrak{F}, \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{F}$.

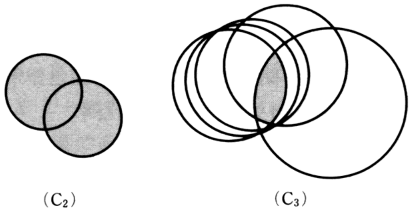


図 2.4 閉集合の公理

証明は命題 1.18 (p.43) とまったく同様である.

X の部分集合 A に対し, A を近傍とするような点を A の**内点**と呼び, 内点全体のなす集合を A の**内部**あるいは**開核**という (図 2.5). 内部を $\mathring{A}$, A°, A^i, $\mathrm{Int}A$ などで表す. 内部は A に含まれる最大の開集合である. また点 p の任意の近傍が部分集合 A と共通点をもつとき, p を A の**触点**と呼び, 触点全体のなす集合を A の**閉包**あるいは**触集合**という. 閉包を $\overline{A}$, A^a, A^b, $\mathrm{Cl}A$ などで表す. 閉包は A を含む最小の閉集合である. A の触点であって内点でないものを A の**境界**

点と呼び, 境界点全体のなす集合を A の**境界**という. 境界を $\dot{A}$, A^f, $\mathrm{Fr}A$, ∂A などで表す. 境界は閉包と内部の差, すなわち $\dot{A}=\overline{A}\setminus\mathring{A}$ で, したがって閉集合である. A の閉包 $\overline{A}$ に属さない点を A の**外点**と呼び, 外点全体のなす集合を A の**外部**という. 外部は A^e で表す. 外部は A の補集合の内部 $(A^c)^\circ$ と一致し, したがって開集合である. 全体集合 X の各点は部分集合 A との位置関係によって, 内点, 境界点, 外点のいずれかに分類される. すなわち直和分割 $X=\mathring{A}\sqcup\dot{A}\sqcup A^e$ が成立する.

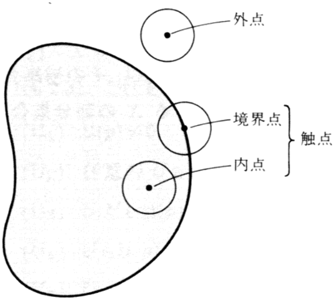


図 2.5　内点, 触点, 境界点, 外点

【定理 2.2】　X の部分集合 A に対し, その閉包 $\overline{A}=A^a$ を対応させるべき集合の間の写像 $\mathfrak{P}(X)\to\mathfrak{P}(X)$, $A\mapsto A^a$ を**閉包作用素**と呼ぶ. 閉包作用素は以下の**閉包作用素の公理**あるいは**クラトウスキの公理**を満たす.

(K_1)　空集合 $\emptyset$ に対して　$\emptyset^a=\emptyset$.

(K_2)　$(A\cup B)^a=A^a\cup B^a$.

(K_3)　$A\subset A^a$.

(K_4)　$(A^a)^a=A^a$.

証明　(K_1), (K_3) は明らかであり, また A^a が閉集合であることから (K_4) が従う. 最後に $A^a\cup B^a$ が A および B を含む閉集合であることから $(A\cup B)^a\subset A^a\cup B^a$ であり, また $(A\cup B)^a$ が A を含む閉集合であることから $A^a\subset(A\cup B)^a$, 同様に $B^a\subset(A\cup B)^a$ であるから (K_2) が成り立つ. ■

近傍系の公理同様, 閉包作用素の公理を位相の出発点とすることもできる. 閉包作用素で不変な部分集合を閉集合とし, その補集合として表される部分集合を開集合として採用するのである. こうして得られた開集合系が開集合の公理を満足すること, 得られた開集合系から逆に閉包作用素を定義したとき, もとの閉包作用素と一致することの証明は割愛する. 興味ある読者は自ら試みられたい.

次に開集合と閉集合の**双対性**について述べる. 空間 X が与えられたとき, ド・モルガンの法則 (p.222, 227) は, X の部分集合に対してその補集合を対応させる写像 $c: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$, $A \mapsto A^c$ が, 和をとる操作 $\cup$ と共通部分をとる操作 $\cap$ とを入れ換えることを示している. 一方 X に位相が定義されていれば, この写像 c は開集合を閉集合に, 閉集合を開集合に写し, 閉包作用素 $a: A \mapsto A^a$ と内部をとる作用素 $i: A \mapsto A^i$ とを入れ換える. したがって一つの命題が得られたとき, その命題における開集合と閉集合を, 和集合と共通部分を, また内部と閉包とを同時に入れ換え, 包含関係を逆にすれば, もう一つの正しい命題が得られる. これをもとの命題の**双対命題**と呼ぶ. 例えば定理 2.2 の (K_2) の双対命題は $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ である. 実際 A, B の補集合 A^c, B^c に (K_2) を適用すれば $(A^c \cup B^c)^a = (A^c)^a \cup (B^c)^a$ であり, この右辺は $(A^i)^c \cup (B^i)^c$ と等しい. したがって右辺の補集合は $\left((A^i)^c \cup (B^i)^c\right)^c = A^i \cap B^i$ であり, 一方左辺の補集合は $((A^c \cup B^c)^a)^c = ((A^c \cup B^c)^c)^i = (A \cap B)^i$ である.

さて部分集合についての記述を続けよう. 部分集合 A が**稠密**とはその閉包が全空間 X と一致する, すなわち $\overline{A} = X$ となるときをいう. 両辺の補集合をとれば $\mathrm{Int}(A^c) = \emptyset$ であるから, A が稠密であることと X の任意の空でない開集合が A と交わることは同値である. X の部分集合 Y に対し, Y の部分集合 A の閉包 $\overline{A}$ が Y を含むとき A は **$\boldsymbol{Y}$ で稠密**であるという. これに対して全空間で稠密であることを**至るところ稠密**ともいう. また位相空間が**可分**とは, 高々可算な稠密部分集合をもつときをいう. 稠密性は閉包が全空間と一致することであるが, 逆に部分集合 A の閉包の補集合が稠密, $\overline{\overline{A}^c} = X$, 言い換えれば A の閉包の内部が空集合, $\mathrm{Int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$, となるとき A を**疎**と呼ぶ. 点 $p \in A$ が A の**孤立点**であるとは, p の適当な近傍と A との共通部分が p 一点のみよりなるとき, 点 $p \in X$ が A の**集積点**であるとは, p の任意の近傍が p 以外の A の点を含むときをいう. 後に

ド・モルガン: Augustus de Morgan, 1806-1871.

述べるハウスドルフ性 (p.106, 110) を空間に仮定すれば, この条件は p の任意の近傍が A の点を無限個含むことと同値であるが, この同値性はすべての位相空間において成り立つわけではない. 例えば X を密着空間, p をその一点とする. p と異なる任意の $x \in X$ に対し, x を含む X の開部分集合は X 自身のみであり, これは p を含む. したがって X の p 以外の任意の点は集合 $\{p\}$ の集積点である. このように一般位相の枠組みのもとでは, しばしば直感に反するような空間が存在するが, これは逆に直感がうまく働くためには位相空間がどのような条件を満たせばよいかを明らかにする意味がある.

2.1.2　連 続 性

X と Y を位相空間, $\varphi : X \to Y$ をその間の写像とする. φ が X の点 $\boldsymbol{p}$ **で連続**であるとは, $\varphi(p)$ の Y での任意の近傍の φ による逆像が p の X での近傍となることと定義する. 写像 φ が部分集合 $A \subset X$ の各点で連続であるとき $\boldsymbol{A}$ **で連続**, 定義域で連続であるとき単に**連続**という.

【定理 2.3】 X, Y, Z を位相空間とする. 写像 $\varphi : X \to Y$ が点 $p \in X$ で, また写像 $\psi : Y \to Z$ が点 $q = \varphi(p) \in Y$ で連続ならば, 合成写像 $\psi \circ \varphi : x \mapsto \psi(\varphi(x))$ は p で連続である. 特に連続写像の合成写像は再び連続となる.

証明　点 $\psi \circ \varphi(p) = \psi(q)$ の近傍 U をとるとき, ψ が q で連続であるから $\psi^{-1}(U)$ は $q = \varphi(p)$ の近傍. したがって φ が p で連続であることから $(\psi \circ \varphi)^{-1}(U) = \varphi^{-1}\left(\psi^{-1}(U)\right)$ は p の近傍である. ■

距離空間の間の写像について, 連続性のこの定義が写像の極限値による定義と一致することは定理 1.12 (p.38) による. 定義域全体での連続性は距離空間の場合 (定理 1.16, p.41) と同様に, 開集合系によって記述される. 証明もまったく同じであるのでここでは省略する.

【定理 2.4】 写像 $\varphi : X \to Y$ が連続となるのは, Y の任意の開集合 O_Y の φ による逆像 $\varphi^{-1}(O_Y)$ が X の開集合となるとき, そのときに限る.

補集合の逆像について $\varphi^{-1}(A^c)=\left(\varphi^{-1}(A)\right)^c$ が成立することから, 定理 2.4 の条件は, 任意の閉集合の逆像が閉集合であることといってもよい.

二つの位相空間 $(X,\mathfrak{O}_X)$, $(Y,\mathfrak{O}_Y)$ の間の写像 $\varphi: X \to Y$ が全単射であり, かつ φ 自身およびその逆写像 φ^{-1} がともに連続であるとき, この φ を**同相写像**, **位相写像**あるいは**双連続**であるという. また同相写像 $\varphi: X \to Y$ が存在するような X と Y とは**同相**, **同位相**あるいは**位相同型**であるといい, これを $X \approx Y$ で表す. また $\varphi: X \to Y$ が同相写像であることを $\varphi: X \approx Y$ あるいは $X \overset{\varphi}{\approx} Y$ で表す. この条件は全単射 φ による X の開集合系 $\mathfrak{O}_X$ の像が Y の開集合系 $\mathfrak{O}_Y$ に一致することに他ならない. 代数系においては, 全単射であるような準同型写像は自動的にその逆も準同型であり, したがって同型写像となる. しかし位相構造に関してはこれは正しくない. 例えば同一の集合 X に離散位相と密着位相とを入れた空間 $(X,\mathfrak{P}(X))$, $(X,\{X,\emptyset\})$ を考えれば, 恒等写像 $\mathrm{id}: (X,\mathfrak{P}(X)) \to (X,\{X,\emptyset\})$ は連続であるが, その逆は連続ではない.

■ **例 2.3** ■ **ザリスキ位相に関する連続性** (参照 例 2.2, p.57)
複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ にザリスキ位相を入れ, 複素数係数の多項式 $p(z)$ がこの空間に導く写像 $p: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ を考える. この写像による一点 $w \in \boldsymbol{C}$ の逆像 $p^{-1}(w) \subset \boldsymbol{C}$ は, 多項式 p が定数 c に一致してしかも $w=c$ である場合を除いて, 有限集合であり, したがってザリスキ位相による $\boldsymbol{C}$ の閉集合の p による逆像は閉集合である. すなわち写像 $p: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ は連続. しかし多項式でない整関数 $f(z)$ については, 適当な $w \in \boldsymbol{C}$ をとれば $f^{-1}(w)$ が無限集合になるから, この整関数の定義する写像 $f: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ はザリスキ位相に関して連続ではない. □

位相空間の間の写像 $\varphi: X \to Y$ が**開写像**であるとは, 任意の開集合 $O \subset X$ の像 $\varphi(O)$ が Y においても開集合となるときをいう. 同じく φ が**閉写像**であるとは, 任意の閉集合 $F \subset X$ の像 $\varphi(F)$ が Y の閉集合となるときをいう. 連続性は任意の開集合 $O_Y \subset Y$ の逆像 $\varphi^{-1}(O_Y)$ が X の開集合となることと同値で (定理 2.4), これは任意の閉集合 $F_Y \subset Y$ の逆像が X の閉集合となることといってもよい. しかし写像の順像については $\varphi(A^c)$ が必ずしも $(\varphi(A))^c$ と一致しないから, 開写像であることと閉写像であることは同値ではない. 2 次元ユークリッド空間から実数空間への射影 $\mathrm{pr}_1: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, $(x,y) \mapsto x$ を考えよう. O を $\boldsymbol{R}^2$ の開集合, x を $\mathrm{pr}_1(O)$ の元とする. このとき $(x,y) \in O$ なる y および $U((x,y);\varepsilon) \subset O$

なる $\varepsilon>0$ が存在するから, $\mathrm{pr}_1(O)$ は $\mathrm{pr}_1(U((x,y);\varepsilon))=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ を含み, したがって $\mathrm{pr}_1(O)$ は開集合である. これより pr_1 は開写像であるが, 一方で方程式 $xy=1$ で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の閉部分集合の pr_1 による像が $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ であるから pr_1 は閉写像ではない. 逆に埋め込み $\iota:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$, $x\mapsto(x,0)$ を考えれば, 閉部分集合 $A\subset\boldsymbol{R}$ の ι による像 $\iota(A)$ は $\boldsymbol{R}\times\{0\}\cap\mathrm{pr}_1^{-1}(A)$ で与えられるから閉集合で, したがって ι は閉写像である. しかし開集合である全体集合 $\boldsymbol{R}$ の像 $\boldsymbol{R}\times\{0\}$ が $\boldsymbol{R}^2$ で内部をもたないから ι は開写像ではない.

2.1.3　基本近傍系

距離空間においては近傍はその点の適当な ε-近傍を含むものとして定義された. 逆にいえば, 任意の近傍に対してそれに含まれる特別の形の近傍が存在する. 一般に X を位相空間, p をその一点とするとき, 点 p の近傍系 $\mathfrak{U}(p)$ の部分集合 $\mathfrak{U}^*(p)$ が p の**基本近傍系**であるとは, 任意の $U\in\mathfrak{U}(p)$ に対して $p\in U^*\subset U$ となる $U^*\in\mathfrak{U}^*(p)$ が存在するときをいう. 各点 p に対して X の部分集合族 $\mathfrak{U}^*(p)$ が与えられているとき, これが適当な位相の基本近傍系となるための条件は以下で与えられる (参照 定理 2.1, p.58).

(U$_1^*$)　$\mathfrak{U}^*(p)\neq\emptyset$.

(U$_2^*$)　任意の $U^*\in\mathfrak{U}^*(p)$ に対して $p\in U^*$.

(U$_3^*$)　$U^*,V^*\in\mathfrak{U}^*(p)$ ならば, 適当な $W^*\in\mathfrak{U}^*(p)$ が存在して $W^*\subset U^*\cap V^*$ を満たす.

(U$_5^*$)　$U^*\in\mathfrak{U}^*(p)$ ならば, 適当な $W^*\subset U^*$, $W^*\in\mathfrak{U}^*(p)$ が存在して, 任意の $q\in W^*$ に対して $V_q^*\in\mathfrak{U}^*(q)$ であって $V_q^*\subset U^*$ なるものが存在する.

(U$_4$) に対応する条件は, 定義より不要である. 近傍の全体, あるいは開近傍の全体などはそれぞれ基本近傍系をなすが, 基本近傍系は, 近傍系をこれで置き換えて議論を進めるための道具であるから, その意味では集合族として小さい方が目的にかなっている. これは次の命題を見れば了解されるであろう.

【命題 2.5】　位相空間の間の写像 $\varphi:X\to Y$ と点 $p\in X$ に対し, φ による p の像 $\varphi(p)\in Y$ の基本近傍系 $\mathfrak{U}^*(\varphi(p))$ が与えられたとする. このとき φ が点 p で連続であるための必要十分条件は, 各元 $U^*\in\mathfrak{U}^*(\varphi(p))$ の φ による逆像

$\varphi^{-1}(U^*)$ が p の近傍であること.

証明 $U^* \in \mathfrak{U}^*$ は $\varphi(p)$ の近傍であるから, φ が p で連続ならば $\varphi^{-1}(U^*)$ は p の近傍である. 逆に各 $U^* \in \mathfrak{U}^*$ が $\varphi(p)$ の近傍であれば, $\varphi(p)$ の任意の近傍 U に対して $U^* \subset U$ なる $U^* \in \mathfrak{U}^*$ が存在することから, $\varphi^{-1}(U) \supset \varphi^{-1}(U^*)$ も p の近傍であり, したがって φ は p で連続である. ■

位相空間 X が**第一可算公理**を満たす, あるいは**第一可算性をもつ**とは, 任意の点が高々可算な基本近傍系をもつときをいう. 距離空間は, 各点 p が $\mathfrak{U}^*(p) = \{U(p; 1/n);\ n = 1, 2, \cdots\}$ なる基本近傍系をもつことから第一可算公理を満たす. この集合族は減少する部分集合の列から構成されている点で使いやすいが, 位相空間の点 p が可算基本近傍系 $\mathfrak{U}^*(p) = \{U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots\}$ をもつ場合にも, $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ とおくことによって, これを可算減少列 $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots$ からなる族 $\mathfrak{V}^*(p) = \{V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots\}$ にとり替えることができる.

距離空間だけではなく, 一般の位相空間においても, 点列とその極限を考えることができる. 位相空間 X の点列 $\{p_n\}$ が**点 p に収束する**とは, p の任意の近傍 U に対して, 十分大なる n をとれば $p_n \in U$ が成り立つことである. 距離空間の場合のように, その他の基本的概念, 例えば写像の連続性などを点列を用いて表現することができれば, 点列は一般位相においても有効な手段となるのであるが, これには二つの難点がある. 一つは点列の収束極限が必ずしも一意に定まらないことであり, これについては分離公理の章で触れる (p.111). もう一つは第一可算性を満たさない空間 X においては, 点 $p \in X$ に収束する点列が, p の近傍の位相を記述するに足りるだけ十分たくさんは存在しないことである (参照 章末問題 3, p.103). この難点を避けるために点列を一般化した概念にネット (有向点列) があるが本書では扱わない. 興味ある読者は [1], [2] などを参照されたい. これに反して定義域の空間 X が第一可算公理を満たすときには, 連続性は点列で記述できる. すなわち写像 $\varphi: X \to Y$ が $p \in X$ で連続となるための必要十分条件は, p に収束する任意の点列 $\{p_n\}$ について $\varphi(p_n)$ が $\varphi(p)$ に収束することである (章末問題 2, p.102). 距離空間において点列が有効であったのは, さかのぼれば実数空間の第一可算性によるものだったのである.

■ 例 2.4* ■ なめらかな関数の空間 $C^\infty[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上定義された実数値関数で無限回微分可能なものの全体を $C^\infty[0,1]$ とおく．ただし $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ が無限回微分可能とは，f の開区間 $(-\delta,1+\delta)$, $\delta>0$ への拡張で無限回微分可能なものが存在することをいう．$C^\infty[0,1]$ は連続関数の空間 $C[0,1]$ の線形部分空間であるから，ノルム $\|\ \|_p$, $1\leq p\leq\infty$ が定義されているが，これらのノルムに関しては微分作用素 $D:C^\infty[0,1]\to C^\infty[0,1]$, $D(f)(x)=f'(x)$ は連続ではない．1 次ノルム $\|\ \|_1$ については，関数列 $f_n(t)=t^n$ を考えれば，$\|f_n\|_1=\dfrac{1}{n}\to 0$ であるけれども $\|D(f_n)\|_1=f_n(1)=1\not\to 0$. 一様ノルム $\|\ \|_\infty$ については，関数列 $g_n(t)=\dfrac{1}{n}t^n$ を考えれば，$\|g_n\|_\infty=\dfrac{1}{n}\to 0$ であるけれども $\|D(g_n)\|_\infty=\|t^{n-1}\|_\infty=1\not\to 0$. その他の p についても同様である．さて $C^\infty[0,1]$ に微分作用素 D が連続となるような位相を導入しよう．そのためにまず $[0,1]$ 上の C^r 級関数，すなわち r 回連続的微分可能であるような関数全体のなす空間 $C^r[0,1]$ の $\boldsymbol{C^r}$ **ノルム**を

$$\|f\|_{(r)} \;=\; \sum_{j=0}^{r}\sup_{0\leq t\leq 1}|f^{(j)}(t)|$$

で定義する．ただし $f^{(j)}(t)$ は $f(t)$ の j-次導関数であり，また $f^{(0)}(t)=f(t)$ である．$\|\ \|_{(r)}$ がノルムの公理を満たすことは容易に確かめられる．特に C^0 ノルム $\|\ \|_{(0)}$ は一様ノルム $\|\ \|_\infty$ と同じものである．なめらかな関数の空間 $C^\infty[0,1]$ は $C^r[0,1]$ の部分空間であるから，$\|\ \|_{(r)}$, $r=0,1,2,\cdots$ はすべて $C^\infty[0,1]$ のノルムでもある．このノルムの族を用いて $f\in C^\infty[0,1]$ の基本近傍系 $\mathfrak{U}^*(f)$ を，$r=0,1,\cdots$ および $\varepsilon>0$ に対して

$$U_{r,\varepsilon}(f) \;=\; \{g;\|g-f\|_{(r)}<\varepsilon\}$$

で与えられる部分集合 $U_{r,\varepsilon}(f)$ の全体として定義する．この $\mathfrak{U}^*(f)$ が基本近傍系の条件 (U_1^*), (U_2^*) を満たすことは自明である．条件 (U_3^*) については，$U_{r,\varepsilon}(f),U_{r',\varepsilon'}(f)\in\mathfrak{U}^*(f)$ に対して r, r' の大きい方を $\bar{r}$, ε, ε' の小さい方を $\bar{\varepsilon}$ とおくと $U_{\bar{r},\bar{\varepsilon}}(f)\subset U_{r,\varepsilon}(f)\cap U_{r',\varepsilon'}(f)$ が成立する．また各 $g\in U_{r,\varepsilon}(f)$ に対して $\delta=r-\|g-f\|_{(r)}$ をとれば $U_{r,\delta}(g)\subset U_{r,\varepsilon}(f)$ が成り立つことから，条件 (U_5^*) も満たされている．以上より $\mathfrak{U}^*(f)$ は基本近傍系の条件をすべて満足し，$C^\infty[0,1]$ に位相を定める．この位相を $\boldsymbol{C^\infty}$ **位相**と呼ぶ．関数列 $\{f_n\}$ が C^∞ 位

相に関して f に収束すれば, 任意の $U_{r,\varepsilon}(f)$ に対して十分大きい N が存在して $n \geq N$ のとき $f_n \in U_{r,\varepsilon}(f)$, 特に f_n の r 次導関数 $f_n^{(r)}$ は一様ノルムに関して $\|f_n^{(r)} - f^{(r)}\|_\infty < \varepsilon$ を満たす. したがって各導関数 $f_n^{(r)}$, $r=0,1,2,\cdots$ は $f^{(r)}$ に $[0,1]$ 上一様収束する. 逆に f_n の各導関数が f の導関数に一様収束すれば, C^∞ 位相に関して f_n は f に収束する. また微分作用素 $D: C^\infty[0,1] \to C^\infty[0,1]$ は $\|D(f)\|_{(r)} = \sum_{j=0}^{r} \sup |f^{(j+1)}(t)| \leq \|f\|_{(r+1)}$ より $D(U_{r+1,\varepsilon}(f)) \subset U_{r,\varepsilon}(D(f))$ を満たすから, C^∞位相に関して連続であることがわかる. □

2.1.4 位相の基と準基

X を距離空間, O を X の開集合とする. 各 $x \in O$ に対して $\varepsilon_x > 0$ をとって, x の ε_x-開球 $U(x;\varepsilon_x)$ が O に含まれるようにできるが, このとき $O = \bigcup_{x \in O} U(x;\varepsilon_x)$ が成立する. これは任意の開集合 O が特別な開集合の和として表されることを示している. 一般に空間 X の位相 $\mathfrak{O}$ に対し, その部分族 $\mathfrak{O}^* \subset \mathfrak{O}$ であって, 任意の開集合 $O \in \mathfrak{O}$ が, 適当な $\{O_\lambda\} \subset \mathfrak{O}^*$ を用いて $O = \bigcup_\lambda O_\lambda$ と書けるような $\mathfrak{O}^*$ を, 位相あるいは開集合系 $\mathfrak{O}$ の**基**, **基底**と呼ぶ. 上で述べたように, 距離空間においては開球の全体は位相の基をなす.

■ 例 2.5 ■ 実数空間 $\boldsymbol{R}$ の位相の基

上の議論によって開区間の族は $\boldsymbol{R}$ における位相の基であるが, さらに両端点が有理数であるような開区間の全体 $\{(p,q);\ p,q \in \boldsymbol{Q}, p<q\}$ もまた基となっている. 任意の開区間 (a,b) に対し, 有理数の稠密性より $a < p_n < q_n < b$ かつ $p_n \to a$, $q_n \to b$ なる有理数の列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ が存在し, この p_n, q_n に対して $(a,b) = \bigcup_n (p_n, q_n)$ が成立するからである. □

空間 X の部分集合族 $\mathfrak{O}^*$ が与えられたとき, これが適当な位相の基となるためには, 開集合の公理に対応する以下の条件を満たす必要がある.

(O_1^*) 任意の $p \in X$ に対し, $p \in O$ なる $\mathfrak{O}^*$ の元 O が存在する.

(O_2^*) 任意の $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}^*$ とその共通部分の点 p に対し, $p \in O \subset O_1 \cap O_2$ なる $\mathfrak{O}^*$ の元 O が存在する.

■ **例 2.6*** ■ **ザリスキ位相**　(参照例 2.2, p.57)

複素 n 次元空間 $\boldsymbol{C}^n$ のザリスキ位相を定義する. 複素数係数 の n 変数多項式 $p=p(z_1,\cdots,z_n)$ に対し, $O_p=\{z; p(z)\neq 0\}$ で定義される $\boldsymbol{C}^n$ の部分集合の全体を $\mathfrak{O}^*$ と書く. 多項式 p, q の積を pq とすれば $O_p \cap O_q = O_{pq} \in \mathfrak{O}^*$ が成り立つから, $\mathfrak{O}^*$ は条件 (O_2^*) を満たし, 適当な位相の基となる. この位相を $\boldsymbol{C}^n$ の**ザリスキ位相**と呼ぶ. $n=1$ の場合にこれがもとの定義と一致することは容易に確かめられる. さて各成分が多項式で与えられるような写像 $\varphi : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^m$ を考える. このとき m 変数の多項式 p に対して, φ と p との合成 $p\circ\varphi$ は n 変数の多項式であるから, $\boldsymbol{C}^m$ のザリスキ位相の基の元 O_p に対して $\varphi^{-1}(O_p)=O_{p\circ\varphi}$ は $\boldsymbol{C}^n$ のザリスキ位相に関する開集合. したがってこの φ は連続写像である. □

条件 (O_1^*), (O_2^*) による制限があるため, 任意に与えられた部分集合族は必ずしも適当な位相の基とはならない. では与えられた集合族に属する各部分集合を開集合とするような位相のうち, 部分集合族として最も“小さい”のはどのような位相であろうか. これに関して次の準基の概念がある.

位相空間 X の部分集合族 $\mathfrak{O}_0$ が開集合系 $\mathfrak{O}$ の**準基**, **準基底**あるいは**部分基**であるとは, $\mathfrak{O}_0$ に属する X の部分集合有限個の共通部分の全体 $\mathfrak{O}^* = \{O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n;\ O_1, O_2, \cdots, O_n \in \mathfrak{O}_0\}$ が開集合系 $\mathfrak{O}$ の基となるときをいう. 定義において $n=0$ をとれば, 全体集合 X が常にこの $\mathfrak{O}^*$ に属することに注意しよう. このとき部分集合族 $\mathfrak{O}_0$ は X の位相 $\mathfrak{O}$ を**生成する**という. 基本近傍系の場合同様, 次が成立する. 証明は容易であろう.

【命題 2.6】　位相空間の間の写像 $\varphi : X \to Y$ と値域 Y の位相の準基 $\mathfrak{O}_0$ が与えらたとき, φ が連続であるための必要十分条件は, 各 $O \in \mathfrak{O}_0$ について $\varphi^{-1}(O)$ が X の開集合であること.

■ **例 2.7** ■ **実数空間 $\boldsymbol{R}$ の位相の準基**

$\{(a,\infty);\ a\in\boldsymbol{R}\}\cup\{(-\infty,b);\ b\in\boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R}$ の通常の位相の準基となっている. これより位相空間上の実数値関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が連続となるための必要十分条件は, 任意の $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対し, $\{x; f(x) > a\}$ および $\{x; f(x) < b\}$ が開集合となること. 例 2.5と同様に a, b を有理数に限ってもやはり準基となる. □

■ **例 2.8** ■ **逆数を対応させる関数** (参照 例 1.15, p.17)

関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ の連続性は, すでに ε-δ 論法によって示したが, 準基を使った簡単な証明を述べる. 実数 a に対して, 定義域 $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ の部分集合 $\{x; f(x)>a\}$ は, $a>0$ の場合 $(0,1/a)$, $a=0$ の場合 $(0,\infty)$, $a<0$ の場合 $(-\infty,1/a)\cup(0,\infty)$ でそれぞれ与えられるから, いずれの場合も開集合である. 同様に $\{x; f(x)<b\}$ で与えられる部分集合も開集合であるから, あわせて f の連続性が導かれる. □

実数空間においては有理数を両端点にもつ開区間の全体が位相の基をなすが, これは可算部分集合族である. このように高々可算な開集合族が位相の基となるとき, 空間は**第二可算公理**を満たす, あるいは**第二可算性**をもつという. 可算集合族が与えられたとき, その元の有限個の共通部分として表される集合の全体はまた可算となるから, この条件は高々可算なる準基の存在と同値である.

【定理 2.7】 第二可算公理を満たす位相空間は第一可算公理を満足し, かつ可分である.

証明 X を位相空間, $\mathfrak{O}^*$ を X の開集合系の基で高々可算なるものとする. X の点 p に対し, p を含む $\mathfrak{O}^*$ の元の全体を $\mathfrak{U}^*(p)$ とおくと, これは高々可算な部分集合族である. 一方 p の任意の近傍は p を元として含む開集合を含むから, 必ず $\mathfrak{U}^*(p)$ の適当な元を部分集合として含む. これは $\mathfrak{U}^*(p)$ が p の基本近傍系をなすことを示している. したがって X は第一可算公理を満たす. また $\mathfrak{O}^*$ の各元から 1 点ずつを選び, その集合を D と書けば, これは可算集合であり, 任意の空でない開集合は D の適当な元を含むから, D は X で稠密となる. ■

距離空間に限れば, 可分性から第二可算公理が導かれる. しかし一般の位相空間についてはこれは正しくない.

【定理 2.8】 可分な距離空間は第二可算公理を満たす.

証明 X を距離空間, D を X の高々可算な稠密部分集合とする. D の元を中心とし, 半径が有理数であるような開球全体を $\mathfrak{O}^*$ とおく. すなわち $\mathfrak{O}^* =$

$\{U(p;r);\ p\in D, r\in\boldsymbol{Q}, r>0\}$. この $\mathfrak{O}^*$ は可算開集合族である. O を X の任意の開集合, x をその点とすると, 定義より適当な $\varepsilon>0$ が存在して $U(x;\varepsilon)\subset O$. D の稠密性より $d(x,p)<\varepsilon/3$ なる $p\in D$ が存在するが, この p と $\varepsilon/3<r<2\varepsilon/3$ なる有理数 r に対し $x\in U(p;r)\subset O$. したがって O は開集合族 $\mathfrak{O}^*$ の適当な部分集合族の和として表される. ■

■ 例 2.9* ■ 半開区間位相

実数の全体 $\boldsymbol{R}$ に, 半開区間 $[a,b)$, $a<b$ の全体から生成される位相を入れた空間 X を考える. このような二つの半開区間の共通部分は, 空でなければまた半開区間となるから, $\{[a,b); a<b\}$ は開集合系の基となる. 任意の半開区間 $[a,b)$ が適当な有理数を含むことから, 有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ は X の可算稠密部分集合であり, X は可分となる. また任意の $p\in X$ に対して, 部分集合族 $\mathfrak{U}^*(p)=\left\{\left[p,p+\dfrac{1}{n}\right);\ n=1,2,\cdots\right\}$ が p の基本近傍系を与えるから, X は第一可算公理を満たす. しかし X は第二可算公理は満たさない. 背理法を用いてこれを証明しよう. $\mathfrak{O}$ をこの位相の開集合系とし, 位相の基となる可算部分集合族 $\mathfrak{A}$ の存在を仮定する. 位相の基 $\mathfrak{A}$ に属する部分集合のうち, $\boldsymbol{R}$ の通常の順序に関して最小元をもつような A を抜き出し, その最小元の全体を $M_{\mathfrak{A}}$ と書く. 任意の開集合 $O\in\mathfrak{O}$ は $\mathfrak{A}$ の元の和として, $O=A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$ と表されるが, この O がもし最小元をもてば, それは A_n のどれかの最小元でもあるわけだから, 同じく $\mathfrak{O}$ の各元の最小元を集めた集合を $M_{\mathfrak{O}}$ とすると, $M_{\mathfrak{O}}$ は $M_{\mathfrak{A}}$ と一致する. $\mathfrak{A}$ が高々可算であったから, $M_{\mathfrak{O}}$ も高々可算となるが, 一方で $\mathfrak{O}$ はすべての半開区間 $[a,b)$ を含むから $M_{\mathfrak{O}}=\boldsymbol{R}$. これは矛盾である (p.233) したがってこの位相空間は第二可算公理を満たさない. 特に X が可分であることから, 定理 2.8 より X の位相はいかなる距離関数からも導かれない. □

第一可算性, 第二可算性および可分性の相互関係は図 2.6 のようになっている.

<まとめ> 一般の空間の位相構造を, 開集合系を出発点として記述した. 近傍を定義してからあとは, 閉集合, 内部, 閉包の定義, 写像や関数の連続性など重要な部分は距離空間の場合とまったく同じである. 近傍系に対して基本近傍系を,

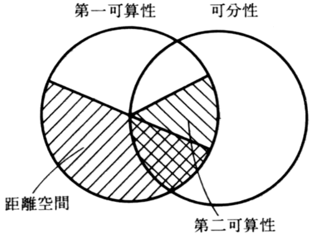


図 2.6 可算公理と可分性

開集合系に対して開集合の基, 準基の概念を導入し, 写像の連続性を判定する場合, また空間に位相を導入する場合に有効であることを示した. 高々可算であるような基本近傍系, 開集合の基が存在することをそれぞれ第一, 第二可算公理と呼ぶが, ほとんどの "よい" 位相空間はこれらを満足している.

[例題] $\boldsymbol{Z}$ を整数の全体とし, 各 $n \in \boldsymbol{Z}$ に対し $\boldsymbol{Z}$ の部分集合族 $\mathfrak{U}^*(n)$ を $\mathfrak{U}^*(n) = \{n+k\boldsymbol{Z};\ k=1,2,\cdots\}$ で定義する. ただし $n+k\boldsymbol{Z} = \{n+k\ell;\ \ell \in \boldsymbol{Z}\}$ である.

(1) 部分集合族 $\mathfrak{U}^*(n)$ は $\boldsymbol{Z}$ の適当な位相の基本近傍系となる.

(2) この位相に関して, 写像 $s: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z},\ n \mapsto n^2$ は連続である.

(3) この位相を導く $\boldsymbol{Z}$ 上の距離関数が存在する.

(解) (1) $\mathfrak{U}^*(n)$ が基本近傍系の条件 (U_1^*)~(U_5^*) を満たすことを示せばよい. (U_1^*), (U_2^*) は自明. (U_3^*) は, k と k' との最小公倍数を $\bar{k}$ と書くとき, $(n+k\boldsymbol{Z}) \cap (n+k'\boldsymbol{Z}) = n+\bar{k}\boldsymbol{Z}$ が成立することから正しい. 最後に $n' \in n+k\boldsymbol{Z}$ ならば $n'+k\boldsymbol{Z} = n+k\boldsymbol{Z}$ であるから (U_5^*) も成立する.

(2) 各点 $n_0 \in \boldsymbol{Z}$ において $s(n)-s(n_0) = n^2-n_0^2 = (n+n_0)(n-n_0)$ より $s(n_0+k\boldsymbol{Z}) \subset s(n_0)+k\boldsymbol{Z}$. $\mathfrak{U}^*(s(n_0))$ の任意の元 $s(n_0)+k\boldsymbol{Z}$ に対して, s による像がこれに含まれるような $\mathfrak{U}^*(n_0)$ の元が存在したから s は n_0 で連続である.

(3) $\mathfrak{U}^*(n)$ に属する基本近傍の減少列 $n+\boldsymbol{Z} \supset n+(2!)\boldsymbol{Z} \supset \cdots \supset n+(k!)\boldsymbol{Z} \supset \cdots$ を考え, その全体を $\mathfrak{U}^{**}(n)$ とおく. 各 $n+k\boldsymbol{Z} \in \mathfrak{U}^*(n)$ に対して, これに含まれる $n+(k!)\boldsymbol{Z}$ が存在するから, $\mathfrak{U}^{**}(n)$ もまたこの位相の基本近傍系となっている. さて $a > 1$ なる a を決め, $n, n' \in \boldsymbol{Z}$ に対して $k!$ が $n-n'$ を割り切るような k の最大のものを $e(n,n')$ とし, $d(n,n') = a^{-e(n,n')}$ とおく. ただし

$d(n,n)=0$ とする．そうすると $e(n,n'')\geq\min\{e(n,n'),e(n',n'')\}$ より，三角不等式 $d(n,n'')\leq d(n,n')+d(n',n'')$ が成立し，d は $\boldsymbol{Z}$ 上の距離関数となる．一方で $d(n',n)\leq\varepsilon$ は，$k=[-\log_a\varepsilon]$ とおいたとき $n'\in n+(k!)\boldsymbol{Z}$ と同値であるから，d の定める位相は基本近傍系 $\mathfrak{U}^{**}(n)$ の定める位相と等しい． ■

2.2　相対位相と直積位相

この節の前半では位相空間の部分空間，直積空間に対して位相を導入する．距離によって位相が与えられている場合には，これらは以前の定義と一致する．後半では位相の間に順序を定め，これを利用して，集合を定義域とする写像族が与えられたとき，もとの集合に位相を定義する方法を述べる．

2.2.1　相 対 位 相

X を位相空間，A をその部分集合とする．X の開集合系 $\mathfrak{O}$ に対し，A の部分集合族を $\mathfrak{O}_A=\{O\cap A; O\in\mathfrak{O}\}$ で定義すれば，これは開集合の公理を満たし，A の位相を与える (図2.7)．この位相を**相対位相**，対 $(A,\mathfrak{O}_A)$ を X の**部分位相空間**あるいは単に**部分空間**という．相対位相を考えていることを強調するために $\mathfrak{O}_A$ の元を**相対開集合**と呼ぶこともある．補集合に関して $(X\backslash O)\cap A=A\backslash(O\cap A)$ が成り立つことから，相対位相に関する A の閉集合の全体は，X の閉集合系を $\mathfrak{F}$ とするとき $\mathfrak{F}_A=\{F\cap A;\ F\in\mathfrak{F}\}$ で与えられる．また点 $p\in A$ の X での近傍系を $\mathfrak{U}(p)$ とするとき，相対位相に関する p の近傍系は $\mathfrak{U}_A(p)=\{U\cap A; U\in\mathfrak{U}(p)\}$ で与えられる．

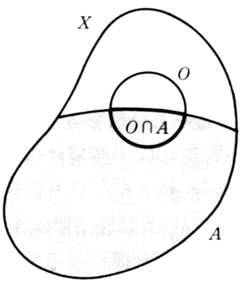


図 2.7　相対開集合

したがって $\mathfrak{U}^*(p)$ が p の X での基本近傍系であれば, $\mathfrak{U}^*_A(p)=\{U\cap A; U\in\mathfrak{U}^*(p)\}$ は相対位相に関する p の基本近傍系となる.

Y が位相空間 X の部分空間であり, Y の部分集合 A が与えられている場合, A は X の部分集合でもあるから, A には X の部分空間としての位相と, Y の部分空間としての位相がはいる. しかし X の開集合系を $\mathfrak{O}_X$ としたとき, Y の部分空間と見たときの A の開集合系は $\{(O\cap Y)\cap A;\ O\in\mathfrak{O}_X\}$ で与えられるが, $(O\cap Y)\cap A=O\cap A$ より, これは X の部分空間と見たときの開集合系と一致する. したがってこれら二つの A の位相は等しい.

■ 例 2.10* ■ ザリスキ位相の相対位相 (参照 例 2.2, p.57; 例 2.6, p.68)
$\boldsymbol{C}$ を写像 $\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^2$, $z\mapsto(z,0)$ によって $\boldsymbol{C}^2$ の部分集合と見なしたとき, $\boldsymbol{C}^2$ のザリスキ位相の相対位相は $\boldsymbol{C}$ のザリスキ位相と一致する. $\boldsymbol{C}^2$ のザリスキ位相は, 二変数の多項式 p を用いて $O_p=\{(z,w);\ p(z,w)\neq 0\}$ と表される部分集合の全体で生成されている. この集合と $\boldsymbol{C}$ との共通部分は $O_p\cap\boldsymbol{C}=\{z;\ p(z,0)\neq 0\}$ で, したがって $\boldsymbol{C}$ のザリスキ位相に関する開集合である. 逆に任意の $\alpha\in\boldsymbol{C}$ に対して $p_\alpha(z,w)=z-\alpha$ とおけば $\boldsymbol{C}\setminus\{\alpha\}=O_{p_\alpha}\cap\boldsymbol{C}$ が成り立つから, $\boldsymbol{C}$ のザリスキ位相の開集合は相対位相の開集合でもある. □

X を距離空間, A をその部分集合とする. このとき A には位相空間 X の部分空間としての相対位相と, X の部分距離空間としての位相とがはいっているが, これら二つの位相は等しい. 実際, 点 x の X における ε-近傍を $U_X(x;\varepsilon)$, A における ε-近傍を $U_A(x;\varepsilon)$ とおくと, $x\in A$ に対して $U_X(x;\varepsilon)\cap A=U_A(x;\varepsilon)$ が成り立つ. 族 $\{U_A(x;\varepsilon)\}_{x\in A}$ は A の距離による位相の基であり, $U_X(x;\varepsilon)$ は X の開集合であったから, 距離による開集合は相対位相による開集合である. 逆に相対位相による開集合を O_A とすると, $O_A=O\cap A$ なる X の開集合 O が存在する. $x\in O_A\subset O$ に対して, X での ε-近傍が O に含まれるような正の数 ε をとれば, $U_A(x;\varepsilon)\subset O\cap A=O_A$. したがって O_A は x の距離による近傍となっている. x は任意であったから, O_A は距離による位相に関しても開集合である.

【定理 2.9】 X, Y を位相空間, A を X の部分空間とし, その包含写像を $\iota: A\to X$ とおく. このとき写像 $\varphi: Y\to A$ が相対位相に関して連続であることと, 合成写像 $\iota\circ\varphi: Y\to X$ が連続であることは同値である (図 2.8).

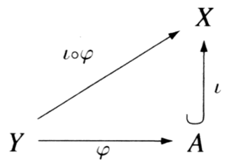


図 2.8　相対位相

証明　O_X を X の開集合とするとき $(\iota\circ\varphi)^{-1}(O_X)=\varphi^{-1}(O_X\cap A)$ が成り立つことによる. ■

定理2.9より包含写像 $\iota: A\hookrightarrow X$ は連続で, したがって連続写像 $\varphi: X\to Y$ の部分空間 A への制限 $\varphi|_A=\varphi\circ\iota: A\to Y$ も連続である. また連続写像 $\psi: Z\to X$ の像 $\psi(Z)$ が部分集合 A に含まれているとき, ψ の値域を A に制限した写像 $\bar{\psi}: Z\to A$ も連続となる.

位相空間の間の写像 $\varphi: X\to Y$ に対し, 値域を制限した写像 $\bar{\varphi}: X\to\varphi(X)$ が, X と相対位相を与えた $\varphi(X)$ との間の同相写像となっているとき, この φ を**埋め込み**, **埋蔵**あるいは**中への同相写像**という.

■ 例 2.11 ■ 曲線

実数空間あるいは区間から位相空間への連続な写像を**曲線**と呼ぶ. X を距離空間, p_0 をその一点とする. 曲線 $\gamma: \boldsymbol{R}\to X$ が単射であってかつ $t\to\pm\infty$ のとき $d(\varphi(t),p_0)\to\infty$ を満たすならば, これは中への同相写像である. 逆写像 $\gamma^{-1}: \gamma(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$ の連続性を示すには, 実数列 $\{t_n\}$ に対し X の点列 $\{\gamma(t_n)\}$ が x_∞ に収束するならば, $\{t_n\}$ も収束し, その極限を t_∞ とするとき $\gamma(t_\infty)=x_\infty$ が成り立つことをいえばよい. もしそうでなければ, 点列 $\{t_n\}$ は, $+\infty$ あるいは $-\infty$ に発散する部分列 $\{t_{n'}\}$ を含むか, あるいは極限 $\bar{t}_\infty$ が $\gamma(\bar{t}_\infty)\neq x_\infty$ を満たすような収束部分列 $\{t_{n'}\}$ を含む (ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理, p.243). 前者の場合は条件より $d(\gamma(t_{n'}),p_0)\to\infty$ であり, 後者の場合は γ の連続性より $\gamma(t_{n'})\to\gamma(\bar{t}_\infty)$ で, いずれも $\gamma(t_{n'})\to x_\infty$ に矛盾する. したがって γ は埋め込みである. 一方で条件 $d(\varphi(t),p_0)\to\infty$, $t\to\pm\infty$ を満たさない曲

ボルツァノ: Bernald Bolzano, 1781-1848.
ワイエルシュトラス: Karl Weierstrass, 1815-1897.

線は, 単射であっても必ずしも埋め込みではない. 変数変換 $t=\tan\theta$ を用いて $\gamma(t)=(\sin 2\theta\cos\theta,\ \sin 2\theta\sin\theta)$ と表される曲線は単射ではあるけれども, $t\to\pm\infty$ のとき $\gamma(t)\to 0=\gamma(0)$ となるから中への同相写像ではない (図 2.9).

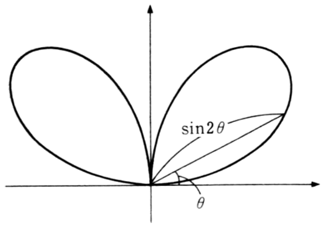


図 2.9 □

X を位相空間, Y を相対位相を与えたその部分空間とする. Y の部分集合 A は X の部分集合でもあるから, A の内点と触点が, X の部分集合として, および Y の部分集合としてそれぞれ定義される. これらはどのような関係にあるだろうか. $\mathrm{Int}_X A$, $\mathrm{Int}_Y A$ を, それぞれ X および Y の部分集合としての A の内部, $\mathrm{Cl}_X A$, $\mathrm{Cl}_Y A$ を X および Y における A の閉包とする. 点 p が内部 $\mathrm{Int}_Y A$ に属するのは p を含む X の開集合 O_X が存在して $O_X\cap Y\subset A$ となるときであるが, このとき $O_X\subset A$ である必要はなく, 必ずしも $p\in\mathrm{Int}_X A$ は成り立たない (図 2.10). 例えば $X=\boldsymbol{R}^2$, $Y=\boldsymbol{R}\times\{0\}$, $A=Y$ とすれば, A の任意の点は Y の部分集合としては内点であるけれども, X の部分集合としては内点ではない. すなわち一般には $\mathrm{Int}_Y A$ と $\mathrm{Int}_X A\cap Y$ とは異なる. 次に点 p が閉包 $\mathrm{Cl}_Y A$ に属するとしよう. これは p を含む X の任意の開集合 O_X に対して $(O_X\cap Y)\cap A=O_X\cap A\neq\emptyset$

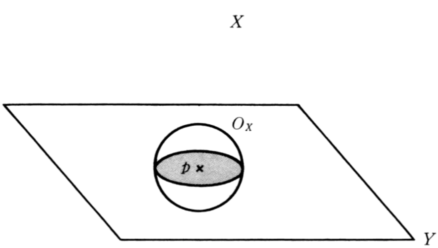


図 2.10

が成り立つことであるから, p は X の部分集合としての A の触点でもある. よって閉包に関しては $\mathrm{Cl}_Y A = \mathrm{Cl}_X A \cap Y$ が成立する.

2.2.2 直積位相

X と Y を位相空間, $\mathfrak{O}_X, \mathfrak{O}_Y$ をそれらの開集合系とする. 開集合 $O_X \in \mathfrak{O}_X$, $O_Y \in \mathfrak{O}_Y$ の積として与えられる直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $O_X \times O_Y$ を**基本開集合**と呼び, その全体を $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y = \{O_X \times O_Y;\ O_X \in \mathfrak{O}_X, O_Y \in \mathfrak{O}_Y\}$ とおく. $(O_X \times O_Y) \cap (O'_X \times O'_Y) = (O_X \cap O'_X) \times (O_Y \cap O'_Y)$ が成立することから, 部分集合族 $\mathfrak{O}_X \times \mathfrak{O}_Y$ は開集合系の基となるための条件 (O_2^*) を満たしている. この基の生成する $X \times Y$ の位相を**直積位相** (図 2.11), この位相をいれた直積集合 $X \times Y$ を**直積位相空間**あるいは単に**直積空間**と呼ぶ. 直積位相は射影 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ に対し $\mathrm{pr}_X^{-1}(\mathfrak{O}_X) \cup \mathrm{pr}_Y^{-1}(\mathfrak{O}_Y)$ の生成する位相であり, 特に $\mathrm{pr}_X, \mathrm{pr}_Y$ は直積位相に関して連続となる. また Y の一点 $y_0 \in Y$ を指定すると, X から直積 $X \times Y$ への写像 $\varphi : X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$ が定義されるが, φ は射影 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ の $X \times \{y_0\}$ への制限を逆写像とする中への同相写像である. 近傍系を用いれば $x \in X$ の X での近傍系を $\mathfrak{U}_X(x)$, $y \in Y$ の Y での近傍系を $\mathfrak{U}_Y(y)$ とするとき, $\mathfrak{U}^*(x,y) = \{U \times V;\ U \in \mathfrak{U}_X(x), V \in \mathfrak{U}_Y(y)\}$ が $(x,y) \in X \times Y$ の直積位相のもとでの基本近傍系を与える.

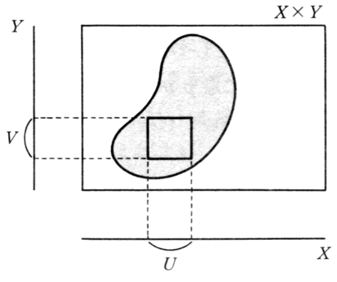


図 2.11　直積空間の開集合

X, Y がともに距離空間である場合には, $X \times Y$ の直積位相は直積の距離から定まる位相に等しい. 実際 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, O_X, O_Y をそれぞれ X, Y の開集合とすれば, $(x,y) \in O_X \times O_Y$ に対して $U_X(x; \varepsilon_x) \subset O_X$, $U_Y(y; \varepsilon_y) \subset O_Y$ なる正数 ε_x, ε_y が存在する. ここで ε を ε_x と ε_y の小さい方とすれば, $d = d_X + d_Y$

に関する (x,y) の ε-近傍 $U_{X\times Y}((x,y);\varepsilon)$ は $O_X\times O_Y$ に含まれる. したがって $O_X\times O_Y$ は距離 d について開集合である. 逆に距離 d に関する (x,y) の ε-近傍 $U_{X\times Y}((x,y);\varepsilon)$ は $U_X(x;\varepsilon/2)\times U_Y(y;\varepsilon/2)$ を含むから, 上の意味での積位相に関する (x,y) の近傍であり, したがって距離に関する開集合は積位相に関する開集合である.

三個以上の有限直積に関しても, これらの議論はまったく同様である. 有限個の位相空間 $(X_1,\mathfrak{O}_1),\cdots,(X_n,\mathfrak{O}_n)$ が与えられたとき, 直積集合 $X_1\times\cdots\times X_n$ の部分集合族 $\mathfrak{O}_1\times\cdots\times\mathfrak{O}_n=\{O_1\times\cdots\times O_n;\ O_i\in\mathfrak{O}_i\}$ の元を**基本開集合**といい, これらを基とする位相を $X_1\times\cdots\times X_n$ の**直積位相**, この位相を入れた直積集合を**直積空間**と呼ぶ. 直積位相は $\mathrm{pr}_k: X_1\times\cdots\times X_n\to X_k$, $k=1,\cdots,n$ を射影とするとき $\bigcup_k \mathrm{pr}_k^{-1}(\mathfrak{O}_k)$ の生成する位相である.

■ **例 2.12*** ■ **位相群**

空間 G が**位相群**であるとは, G が位相空間としての構造と, 群としての構造をあわせもち, さらに群の演算によって定義される写像

$$G\times G\to G,\quad (g,h)\mapsto g^{-1}h$$

が連続であるときをいう. 整数の全体 $\boldsymbol{Z}$, 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$, 実数空間 $\boldsymbol{R}$, 複素数空間 $\boldsymbol{C}$ などは加法に関して, $\boldsymbol{Q}\backslash\{0\}$, $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$, $\boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ は乗法に関して位相群をなす (例 1.15, p.17). また行列式が 0 でない n 次実正方行列の全体も積に関して位相群をなし, これを n 次一般線形群と呼ぶのであった (例 1.31, p.32). 位相群の部分群が相対位相に関して再び位相群をなすことから, 特殊線形群 $SL(n;\boldsymbol{R})$, 直交群 $O(n;\boldsymbol{R})$, 特殊直交群 $SO(n;\boldsymbol{R})$ も位相群である. 同様に複素 n 次一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{C})$, すなわち行列式が 0 でない n 次複素正方行列の全体, およびその部分群であるユニタリ群 $U(n)$, 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ なども また位相群である. 詳しくは線形代数の教科書を参照されたい. □

次に無限直積を扱う. $(X_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$ を位相空間の族とする. **直積空間** $X=\prod_\lambda X_\lambda=\{x=(x_\lambda);\ x_\lambda\in X_\lambda\}$ から各 X_λ に射影 $\mathrm{pr}_\lambda: X\to X_\lambda$, $x=(x_\lambda)\mapsto x_\lambda$ が定義されるが, この写像による各開集合系 $\mathfrak{O}_\lambda$ の逆像全体のなす集合族 $\bigcup_\lambda \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)$ の生成する位相として**直積位相**を定義する. 具体的には有限

個の添数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ に対して, O_{λ_j}, $j=1,\cdots,k$ を X_{λ_j} の開集合として

$$\left(\prod_{\lambda\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_k} X_\lambda\right)\times O_{\lambda_1}\times\cdots\times O_{\lambda_k}$$

と表される X の部分集合全体を基とする位相である. 有限直積の場合同様, この形の開集合を**基本開集合**という. 各点 $x=(x_\lambda)\in\prod_\lambda X_\lambda$ の基本近傍系は, その λ-座標 $x_\lambda\in X_\lambda$ の近傍系を $\mathfrak{U}_\lambda(x_\lambda)$ とおくとき,

$$\mathfrak{U}^*(x)=\left\{\left(\prod_{\lambda\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_k} X_\lambda\right)\times U_{\lambda_1}\times\cdots\times U_{\lambda_k};\ U_{\lambda_i}\in\mathfrak{U}_{\lambda_i}(x_{\lambda_i}),\ i=1,\cdots,k\right\}$$

で与えられる.

各位相空間 X_λ が距離空間であり, かつ添数集合 Λ が可算集合である場合, 直積 $\prod_\lambda X_\lambda$ には距離が定義されていたが (p.33), この距離から定まる位相はここで定義した直積位相と等しい. 添数集合を $\boldsymbol{N}$, 各 X_k, $k\in\boldsymbol{N}$ の距離を d_k, ただし $d_k\leq 1$ を満たすものとし, 直積の距離を $d=\sum\dfrac{1}{2^k}d_k$ とおく. 直積位相に関する基本開集合を $O=O_1\times\cdots\times O_n\times X_{n+1}\times X_{n+2}\times\cdots$, この O に属する任意の点を $x=(x_k)$ としよう. 各 $x_k\in O_k$, $k=1,2,\cdots,n$ に対して $U(x_k,\varepsilon_k)\subset O_k$ なる ε_k が存在するから, $\varepsilon_k/2^k$, $k=1,\cdots,n$ のうち最小のものを ε で表せば, x の直積の距離 d に関する ε-近傍は $U(x_1;\varepsilon_1)\times\cdots\times U(x_n;\varepsilon_n)\times X_{n+1}\times X_{n+2}\times\cdots\subset O$ に含まれる. したがって O は距離 d に関しても開集合である. 逆に O を距離に関する開集合とする. 各 $x\in O$ に対して適当な $\varepsilon>0$ が存在して, x の ε-近傍 $U(x;\varepsilon)$ は O に含まれるが, $2^{-n}<\varepsilon/2$ を満たすような n をとれば, この $U(x;\varepsilon)$ は x を含む基本開集合 $U(x_1;\varepsilon/2)\times\cdots\times U(x_n;\varepsilon/2)\times X_{n+1}\times X_{n+2}\times\cdots$ を部分集合として含む. したがって O は直積位相に関しても開集合である.

【定理 2.10】　空間 Z から直積空間 $\prod_\lambda X_\lambda$ への写像 $\varphi: Z\to\prod_\lambda X_\lambda$ が連続となるための必要十分条件は, 各射影 $\mathrm{pr}_\lambda:\prod_\lambda X_\lambda\to X_\lambda$ との合成写像 $\mathrm{pr}_\lambda\circ\varphi: Z\to X_\lambda$ が連続となること (図 2.12).

証明　φ が連続ならば合成写像 $\mathrm{pr}_\lambda\circ\varphi$ は連続. 逆に各 $\mathrm{pr}_\lambda\circ\varphi$ が連続ならば, X_λ の開集合系を $\mathfrak{O}_\lambda$ とするとき $\varphi^{-1}\bigl(\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)\bigr)$ は Z の開集合系に含まれるが,

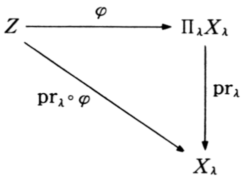


図 2.12 直積位相

$\prod_\lambda X_\lambda$ の位相は $\bigcup_\lambda \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)$ によって生成されるから φ は連続である. ■

■ **例 2.13** ■ **カントール集合** C (参照 例 1.51, p.48)

二点よりなる集合 $A=\{0,1\}$ に離散位相を入れたとき, 可算直積空間 $\Sigma_{2+}=\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}=\{\alpha=(\alpha_n)_{n=1,2,\cdots};\alpha_n=0,1\}$ がカントール集合 C と同相となることを証明しよう. 各 $\alpha=(\alpha_n)\in\Sigma_{2+}$ に対して $U_N(\alpha)=\{\alpha_1\}\times\cdots\times\{\alpha_N\}\times A\times\cdots$ とおけば, その全体 $\mathfrak{U}^*(\alpha)=\{U_1(\alpha),U_2(\alpha),\cdots\}$ が点 α の基本近傍系を与える. 写像 $\iota:\Sigma_{2+}\to C$ を $\iota(\alpha)=\sum\dfrac{2\alpha_n}{3^n}$ で定義すると, $\alpha'\in U_N(\alpha)$ に対して $|\iota(\alpha')-\iota(\alpha)|\leq\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}|\alpha'_n-\alpha_n|\leq\frac{1}{3^N}$ が成り立つから ι は連続である. また α' が $U_N(\alpha)$ に属していなければ, $\alpha'_n\neq\alpha_n$ なる $n\leq N$ が存在する. このような n のうち最小のものを K と書けば, $|\iota(\alpha')-\iota(\alpha)|=\left|\pm\dfrac{2}{3^K}+\displaystyle\sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}(\alpha'_n-\alpha_n)\right|\geq\dfrac{2}{3^K}-\displaystyle\sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{2}{3^n}|\alpha'_n-\alpha_n|\geq\frac{1}{3^K}\geq\frac{1}{3^N}$ より ι^{-1} も連続である. したがって $\iota:\Sigma_{2+}\to C$ は同相写像である.

同じく有限離散空間の可算直積はカントール集合と同相である. $\{a,b,c\}^{\boldsymbol{N}}$ の場合にこの集合から $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ への同相写像を構成しよう. $\{a,b,c\}^{\boldsymbol{N}}$ の元は a,b,c の無限列, $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ の元は $0,1$ の無限列であるから, $T(a)=0$, $T(b)=10$, $T(c)=11$ とおくと, T は自然に写像 $\bar{T}:\{a,b,c\}^{\boldsymbol{N}}\to\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ を定める. 例えば $\bar{T}:abac\cdots\mapsto T(a)T(b)T(a)T(c)\cdots=010011\cdots$. この $\bar{T}$ は単射である. 逆に任意の $0,1$ の列に対して先頭から 0, 10, 11 のいずれかを除くという作業を繰り返し行うことができるから $\bar{T}$ は全射でもある. また a,b,c の無限列 α, β の最初の n 項が一致していれば $\bar{T}(\alpha)$ と $\bar{T}(\beta)$ は少なくとも最初の n 項は一致し, 逆に $\bar{T}(\alpha)$ と $\bar{T}(\beta)$ の最初の m 項が一致していれば, α と β は少なくとも最初の $m/2$ 項は一致す

る. これは $\bar{T}$ および $\bar{T}^{-1}$ がともに連続であることを示しているから, $\bar{T}$ は同相写像である. 一般の場合については, 拡張した形で 例5.8 (p.173) で扱う. □

2.2.3　位相の強弱

同一の集合上の位相に対して, 包含関係によって順序を定義する. X を集合, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$ を X上の位相とする. 位相 $\mathfrak{O}$ に関する開集合が常に位相 $\mathfrak{O}'$ に関する開集合であるとき, すなわち $\mathfrak{O}\subset\mathfrak{O}'$ のとき, 位相 $\mathfrak{O}$ は位相 $\mathfrak{O}'$ より**弱い**あるいは**粗い**, また $\mathfrak{O}'$ は位相 $\mathfrak{O}$ より**強い**あるいは**細かい**という. この条件は恒等写像 $\mathrm{id}:(X,\mathfrak{O}')\to(X,\mathfrak{O})$ が連続であることと同値. 定義によれば密着位相は任意の位相よりも弱く, 離散位相は任意の位相よりも強い. また空間 X 上の二つの距離 d, d' に対し, 適当な実数 c が存在して $d(x,y)\leq cd'(x,y)$ が成立するならば, 恒等写像 $\mathrm{id}:(X,d')\to(X,d)$ はリプシッツ連続であり, したがって距離 d の定める位相は距離 d' の定める位相よりも弱い. 文献によっては, 強弱の定義が逆になっているので注意が必要である.

■ 例 2.14 ■ 連続関数の空間 $C[0,1]$ のノルムの強弱　(参照 例 1.4 , p.6)
連続関数の空間 $C[0,1]$ の p 次ノルム $\|\ \|_p$, $1\leq p\leq\infty$ は, ノルムの単調性 (p.250) より, $1\leq p\leq q\leq\infty$ なる p, q に対しては $\|f\|_p\leq\|f\|_q$ を満たす. したがってノルム $\|\ \|_q$ の定義する位相はノルム $\|\ \|_p$ の定義する位相よりも強い. □

空間 X 上の位相の族 $\{\mathfrak{O}_\lambda\}$ が与えられたとき, それらの共通部分 $\bigcap_\lambda\mathfrak{O}_\lambda$ は再び開集合の公理を満たす. したがってこの族の位相としての**下限**, すなわちすべての $\mathfrak{O}_\lambda$ よりも弱い位相のうちで最強の位相 $\inf\mathfrak{O}_\lambda$ は, 部分集合の包含関係に関する下限と同じく $\bigcap_\lambda\mathfrak{O}_\lambda$ で与えられる. 一方で包含関係に関する上限である和集合 $\bigcup_\lambda\mathfrak{O}_\lambda$ は必ずしも開集合の公理を満足しないから, この族の位相としての**上限**, すなわち各 $\mathfrak{O}_\lambda$ よりも強いけれども, その中では最も弱い位相とは異なる. 位相としての上限 $\sup\mathfrak{O}_\lambda$ は 和集合 $\bigcup_\lambda\mathfrak{O}_\lambda$ で生成される位相である.

2.2.4　誘 導 位 相

集合 X に対して, X から位相空間への写像の族 $\varphi_\lambda:X\to X_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$ が与えられたとき, これらの φ_λ すべてが連続となるような X の位相を考える. このような位相は一意的ではないが, そのうち最も弱い位相は, 各 X_λ の開集合系を $\mathfrak{O}_\lambda$

とするとき, $\bigcup\varphi_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)$ で生成される位相である. これを写像族 $\{\varphi_\lambda\}$ によって**導かれた位相**, **誘導位相**, **生成された位相** あるいは**弱位相** と呼ぶ. 位相空間の部分集合に定義された相対位相は包含写像による誘導位相であり, 位相空間の直積に定義された直積位相は射影の族による誘導位相である.

【定理 2.11】 空間 X に写像の族 $\varphi_\lambda : X \to X_\lambda$ による誘導位相を入れる. このとき位相空間 Y から X への写像 $\psi : Y \to X$ が連続となるのは, 各 λ について合成写像 $\varphi_\lambda \circ \psi : Y \to X_\lambda$ が連続となるとき, そのときに限る.

証明 X_λ の開集合系を $\mathfrak{O}_\lambda$ とする. 各 $\varphi_\lambda \circ \psi$ が連続であれば, $O_\lambda \in \mathfrak{O}_\lambda$ に対して $(\varphi_\lambda \circ \psi)^{-1}(O_\lambda) = \psi^{-1}\bigl(\varphi_\lambda^{-1}(O_\lambda)\bigr)$ は Y の開集合であるが, X の位相は $\bigcup_\lambda \varphi_\lambda^{-1}(\mathfrak{O}_\lambda)$ で生成されるから, 任意の開集合の ψ による逆像も Y の開集合で, したがって ψ は連続である. 逆は連続写像の合成が連続であることからわかる. ■

誘導位相の重要な例として関数解析で用いられる弱位相がある.

■ 例 2.15* ■ 各点収束の位相

閉区間 $[0,1]$ の点 x に対し, 連続関数全体の空間 $C[0,1]$ 上の線形汎関数 $\mathrm{ev}_x : C[0,1] \to \boldsymbol{R}$ を $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ で定義し, これを**評価写像**と呼ぶ. 評価写像の族 $\{\mathrm{ev}_x\}_{0 \leq x \leq 1}$ は $C[0,1]$ に位相を定義するが, $|\mathrm{ev}_x(f) - \mathrm{ev}_x(g)| = |f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_\infty$ であるから, この誘導位相は一様ノルム $\|\ \|_\infty$ によって定義される位相より弱い. 実際, 直積空間 $\prod_{0 \leq x \leq 1} \boldsymbol{R}$ を考えれば, $\{\mathrm{ev}_x\}$ による誘導位相は写像 $C[0,1] \to \prod_{0 \leq x \leq 1} \boldsymbol{R}$, $f \mapsto (f(x))_{0 \leq x \leq 1}$ による相対位相, したがって各点収束の位相であり, $\|\ \|_\infty$ は一様収束の位相を定義している. 一方 1 次ノルム $\|\ \|_1$ に関しては, $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \cdots$ で与えられる関数列は $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n} \to 0$ を満たすが $\mathrm{ev}_1(f_n) = f_n(1) \equiv 1$ であり, また $g_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 2 - nx, & \dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0, & \dfrac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$, $n = 2, 3, \cdots$

で与えられる関数列は, 各 $x\in[0,1]$ に対して $\mathrm{ev}_x(g_n)=g_n(x)\to 0$ を満たすが $\|g_n\|_1\equiv 1$. よって評価写像による誘導位相と 1 次ノルムによる位相とは比較できない. これは他の p 次ノルム, $1<p<\infty$ についても同様である. □

■ 例 2.16* ■ 数列空間の弱位相　(参照 例 1.5, p.6)

数列空間 $\ell^2=\left\{x=(x_n)_{n=1,2,\cdots};\ \sum|x_n|^2<\infty\right\}$ のノルムは, 内積 $<x,y>=\sum x_ny_n$ を用いて $\|x\|=\sqrt{<x,x>}$ と表される. コーシー-シュワルツの不等式 (p.246) を用いれば, この内積は任意の $x,y\in\ell^2$ に対して収束し, かつ x,y について連続であることが証明できる. したがって ℓ^2 の元 x を一つ定めれば連続な線形汎関数 $F_x:\ell^2\to\boldsymbol{R}$, $F_x(y)=<x,y>$ が得られるが, 逆に ℓ^2 上の連続線形汎関数はすべてこの形に書くことができる. これを証明しよう. $F:\ell^2\to\boldsymbol{R}$ を連続な線形写像とする. F はノルム空間上の連続線形汎関数であるから有界, すなわち定数 C が存在して $|F(y)|\le C\|y\|$ を満たす (例 1.14, p.16). 基底 $e_k=(0,\cdots,0,\overset{k}{\check{1}},0,\cdots)$ に対して $a_k=F(e_k)$ とおき, $a(n)=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k=(a_1,\cdots,a_n,0,\cdots)$ を考える. $a(n)$ は e_k, $k=1,\cdots,n$ の線形和であるから, $F(a(n))=\sum_{k=1}^{n}a_kF(e_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\|a(n)\|^2$. 一方 $|F(a(n))|\le C\|a(n)\|$ より $\|a(n)\|\le C$. ここで C は n によらないから $n\to\infty$ に対して $\|a(n)\|$ は有界であり, したがって $a=(a_k)$ は ℓ^2 に属する. そうすると各 e_k に対して $F(e_k)=<a,e_k>$ が成り立つことから, 任意の $y=(y_1,y_2,\cdots)\in\ell^2$ に対して $y(n)=(y_1,\cdots,y_n,0,\cdots)$ とおくとき $F(y(n))=<a,y(n)>$ が成立する. この両辺の $n\to\infty$ での極限をとれば $F(y)=<a,y>$, すなわち任意の連続汎関数 F が F_a, $a\in\ell^2$ と表現された. さて, すべての線形汎関数よりなる族 $\{F_x\}_{x\in\ell^2}$ から誘導される位相を ℓ^2 の**弱位相**と呼ぶ. これに対してノルム $\|\ \|_2$ から定まる位相を**強位相**ということもある. 弱位相は強位相よりも真に弱い. 例えば基底 e_k によって与えられる点列 $\{e_k\}$ は, $k\neq k'$ について $\|e_k-e_{k'}\|=\sqrt{2}$ を満たすから, 強位相に関してはいかなる点にも収束しないが, 一方で任意の $x=(x_1,x_2,\cdots)\in\ell^2$ について $k\to\infty$ のとき $x_k\to 0$ が成り立つことから, $<x,e_k>\to 0$ であり, 弱位相に関しては $(0,0,\cdots)\in\ell^2$ に収束する.

連続関数の空間 $C[0,1]$ においても 2 次ノルム $\|f\|_2=\int_0^1|f(t)|^2dt$ は, 内積 $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)dt$ を用いて $\|f\|_2=\sqrt{<f,f>}$ と表されるから, このノル

ムに関する連続線形汎関数についても同様の議論が展開できる．しかし $C[0,1]$ 上のすべての連続線形汎関数 $F: C[0,1]\to \boldsymbol{R}$ を内積の形で表すためには, $C[0,1]$ をノルム $\| \|_2$ によって完備化しておくか, あるいは同じことであるがルベーグ積分論を用いて最初から $[0,1]$ 上の二乗可積分関数全体の空間 $L^2[0,1]$ を考える必要がある． □

＜まとめ＞ 位相空間の部分空間および直積空間への位相の導入と, 一つの集合の上の位相の順序を扱った．相対位相は包含写像が連続となるような最弱の位相, 直積位相は各射影が連続となるような最弱の位相としてもとらえられる．

［例題］ 二点よりなる集合 $A=\{0,1\}$ に離散位相を入れ, $\boldsymbol{Z}$ を添数集合とする直積空間 $\Sigma_2=A^{\boldsymbol{Z}}=\{\alpha=(\alpha_n)_{n\in\boldsymbol{Z}};\ \alpha_n=0,1\}$ を考える．Σ_2 は 0, 1 の両側無限列の全体からなる空間である (参照 例 2.13, p.79)．このとき以下を示せ．

(1) 写像 $\sigma: \Sigma_2\to\Sigma_2$ を $\sigma(\alpha)_n=\alpha_{n+1}$ で定義すると, これは Σ_2 から自分自身への同相写像である．この σ を**ずらし写像**と呼ぶ．

(2) 適当な元 $\alpha\in\Sigma_2$ をとれば, 部分集合 $\{\sigma^n(\alpha);\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ は Σ_2 で稠密となる．ただし σ^n は σ の n 回の合成, すなわち $n>0$ のとき $\sigma^n=\overbrace{\sigma\circ\cdots\circ\sigma}^{n}$, $\sigma^0=\mathrm{id}$, $n<0$ のとき $\sigma^n=\overbrace{\sigma^{-1}\circ\cdots\circ\sigma^{-1}}^{-n}$ を表す．

(3) $\alpha\in\Sigma_2$ が σ の**周期点**であるとは, $n>0$ が存在して $\sigma^n(\alpha)=\alpha$ が成り立つときをいう．σ の周期点全体のなす集合 $\mathrm{Per}(\sigma)$ は Σ_2 で稠密である．

（解） (1) 各 $\alpha=(\alpha_n)$ に対し, その第 k 座標を対応させる写像を $p_k: \Sigma_2\to A$ とおく．写像 σ について $p_k\circ\sigma=p_{k+1}$ が成り立ち, また Σ_2 の位相が p_k, $k=\cdots,-1,0,1,\cdots$ で生成されていることから, ずらし写像 σ は連続である．

(2) 文字 0, 1 からなる有限列の全体 $A_s=\bigcup_{k=1}^{\infty}A^k$ は可算集合であるから, その元を a_m, $m=1,2,\cdots$ と列挙する．これを用いて $\alpha\in\Sigma_2$ を

$$\alpha=\cdots0\cdots0a_1a_2\cdots$$

とおく．ただし a_1 の先頭が第 0 座標である．そうすると a_m, $m=1,2,\cdots$ がすべての有限列を尽くしていることから, 任意の $\beta\in\Sigma_2$ および $k>0$ に対して n

を適当に選んで, $\sigma^n(\alpha)$ と β が第 $-k$ 座標から第 k 座標まで一致するようにできる. これは部分集合 $\{\sigma^n(\alpha);\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ が Σ_2 で稠密なることを示している.
(3) 上の $a_m\in A_s$ を用いて Σ_2 の元を $\alpha_m=\cdots a_m a_m a_m\cdots$ で定義する. これは σ の周期点であり, (2) と同じ理由によって α_m の全体は Σ_2 で稠密である. ■

2.3　商　位　相

一つの集合 Z を値域とする位相空間からの写像の族 $\varphi_\lambda: X_\lambda\to Z,\ \lambda\in\Lambda$ が与えられたとき, すべての φ_λ を連続とするような位相のうち, 最も強い位相を集合 Z に入れる. 集合を定義域とする写像の族が与えられた場合と同じく, これを写像族の**誘導する位相**と呼ぶ. 典型例は位相空間に同値関係が与えられた場合の商集合の位相である. 商空間は商集合とともに把握が難しい概念であるが, 幾何学においては対象が商空間として与えられることは少なくない. また商位相は相対位相, 直積位相と異なり, 距離空間の商空間であっても位相は必ずしも距離によっては記述できず, 一般位相によってはじめて扱うことが可能となる.

2.3.1　和 空 間

まず位相空間の直和を定義しよう. X, Y を位相空間, $\mathfrak{O}_X$, $\mathfrak{O}_Y$ をそれぞれの開集合系とする. 集合 Z を X と Y との直和 $X\sqcup Y$ とし, その開集合系を $\mathfrak{O}_Z=\{O_X\cup O_Y;\ O_X\in\mathfrak{O}_X, O_Y\in\mathfrak{O}_Y\}$ で定める. すなわち部分集合 $O\subset Z$ が開集合となるのは, $O\cap X$ および $O\cap Y$ がともに X および Y の開集合であるとき. こうして得られた空間 $(Z,\mathfrak{O}_Z)$ を X と Y との**直和**といい, 集合の場合と同じく $X\sqcup Y$ あるいは $X+Y$ で直和を表すが, この記号を用いた場合には X と Y とに共通の元がある場合でも, それらは異なるものとして和を考えている (参照 p.221). 直和をとる空間の数が多い場合もまったく同様である. すなわち $\{(X_\lambda,\mathfrak{O}_\lambda)\}_\lambda$ を位相空間の族とするとき, その**直和**を, 集合 $X=\bigsqcup_\lambda X_\lambda$ に $\mathfrak{O}_X=\{\bigsqcup O_\lambda;\ O_\lambda\in\mathfrak{O}_\lambda\}$ で開集合系を定義した空間とする.

■ 例 2.17 ■ 離散空間　(参照例 2.1, p.57)
離散空間 X は, 各構成要素 $x\in X$ に対してその一点よりなる部分空間 $\{x\}$ を考えれば, その直和 $\bigsqcup_{x\in X}\{x\}$ と見なすことができる. □

直和は関係の与えられていない空間の和であったが, 次に空間の増大列の和として定義される空間を考える. 位相空間の増大列

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots ,$$

正確には中への同相写像 $\iota_n : X_n \to X_{n+1}$ が与えられているような位相空間の列 $\{X_n\}$ に対し, 和集合 $X = \bigcup X_n$ の開集合系を, 各 X_n の開集合系を $\mathfrak{O}_n$ としたとき $\mathfrak{O} = \{O;\ O \cap X_n \in \mathfrak{O}_n\}$ で定義する. 直和と同じく部分集合 $O \subset X$ が開集合であることを, 各 $O \cap X_n$ が X_n で開であることとして定めるのである (図 2.13). これを**弱位相**と呼ぶ. 前項 2.2.4 の弱位相とは異なるので注意すること (p.81). 和空間 X に弱位相を入れたとき, 各 X_n から X への自然な単射 $\eta_n : X_n \hookrightarrow X$ は中への同相写像となる. 実際, X の開集合 O の逆像 $\eta^{-1}(O) = X_n \cap O$ は定義によって開集合であるから η は連続. また $\iota_n : X_n \to X_{n+1}$ は中への同相写像であるから, 開集合 $O_n \subset X_n$ に対して $O_n = X_n \cap O_{n+1}$ なる開集合 $O_{n+1} \subset X_{n+1}$ が存在するが, これを繰り返して構成した $O_n \subset O_{n+1} \subset \cdots$ の和 $O = \bigcup_{k \geq n} O_k$ は X の開集合で, しかも $O_n = X_n \cap O$ を満たす. したがって逆写像 $\eta^{-1}|_{\eta(X_n)} : \eta(X_n) \to X_n$ も連続である. 次の命題も同様に証明される.

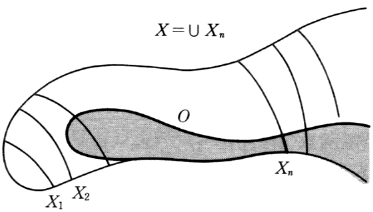


図 2.13 和空間

【命題 2.12】 空間の増大列 $X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots$ の和空間を $X = \bigcup_n X_n$ とおく. このとき写像 $\varphi : X \to Z$ が連続となるのは, 各 X_n への φ の制限 $\varphi|_{X_n} : X_n \to Z$ が連続となるとき, そのときに限る.

■ 例 2.18 ■ 開集合の増大列

位相空間 X が開部分集合の増大列 $O_1 \subset O_2 \subset \cdots \subset O_n \subset \cdots$ の和 $X = \bigcup O_n$ とし

て表されているとき, X の位相は和空間 $\bigcup O_n$ としての位相と等しい. O を X の開部分集合とするとき $O \cap O_n$ は O_n の開集合であり, 逆に各 $O \cap O_n$ が O_n の開集合であれば, $O \cap O_n$ 自身が X の開集合で, したがって $O = \bigcup (O \cap O_n)$ も X の開集合であることによる. 例えば距離空間 X は, その一点 p_0 を中心とする半径 r の開球 $U(p_0; r)$ の和 $\bigcup_{r>0} U(p_0; r)$ であるが, 位相も和空間としての位相と等しい. 閉球 $B(p_0; r)$ に関しても $B(p_0, r) \subset \mathrm{Int} B(p_0, r')$, $r < r'$ が成り立つことから, 和空間 $\bigcup_{r>0} B(p_0; r)$ としての位相はもとの位相と一致する. □

■ 例 2.19* ■ 無限次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^\infty$

自然な埋め込み $\boldsymbol{R}^n \hookrightarrow \boldsymbol{R}^{n+1}$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, 0)$ による増大列 $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{R}^2 \subset \cdots \subset \boldsymbol{R}^n \subset \cdots$ の和空間を**無限次元ユークリッド空間**といい, $\boldsymbol{R}^\infty$ で表す. この $\boldsymbol{R}^\infty$ は第一可算公理を満足せず, その位相は距離関数によっては導かれない. これを背理法で証明しよう. 原点 $0 = (0, 0, \cdots)$ が可算基本近傍系 $\{U_1, U_2, \cdots\}$, $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ をもつとする. この基本近傍系を $\boldsymbol{R}^k$ に制限したものは $\boldsymbol{R}^k$ の通常の位相のもとでの原点の基本近傍系となるから, U_k の点で $x_k = (0, \cdots, 0, \overset{k}{\check{a}_k}, 0, \cdots)$, $a_k > 0$ の形のものが存在する. $k \geq \ell$ のとき $U_k \subset U_\ell$ より $x_k \in U_\ell$. したがって点列 $\{x_k\}$ は原点 0 に収束する. 一方 X を x_k の全体からなる集合 $\{x_k; k = 1, 2, \cdots\}$ とすると, $X \cap \boldsymbol{R}^n$ は有限集合であるから $\boldsymbol{R}^n$ の閉集合, したがって X 自身が $\boldsymbol{R}^\infty$ の閉集合である. これは点列 $\{x_k\}$ が 0 に収束することと矛盾する. 集合 $\boldsymbol{R}^\infty$ はある番号以上がすべて 0 であるような数列 $(x_n)_{n=1,2,\cdots}$ の全体であり, 距離関数 $d(x, y) = \sqrt{\sum |x_n - y_n|^2}$ が定義できるが, 和空間としての位相はこの d によって導かれるものとは異なるのである. □

2.3.2 商 空 間

位相空間 X に同値関係 $\sim$ が与えられれば, 商集合 $X/\!\sim$ および商写像 $q : X \to X/\!\sim$ が定義される (p.231). この商集合 $X/\!\sim$ に商写像 q を用いて位相を導入しよう. 定義する位相に関して $q : X \to X/\!\sim$ が連続となることを要請するのは当然であるが, これは位相が弱ければ満たされるので, そのうちの最強のものを q による**誘導位相**として採用する. 具体的には X の開集合系を $\mathfrak{O}$ として $\mathfrak{O}_q = \{O \subset X/\!\sim;\ q^{-1}(O) \in \mathfrak{O}\}$ とおくと, $\mathfrak{O}_q$ は開集合の公理を満たし $X/\!\sim$ の位相を与える. この位相を商集合 $X/\!\sim$ の**商位相**あるいは**等化位相**と呼び, 空間

$(X/\sim, \mathfrak{O}_q)$ を**商位相空間**, **商空間**, **等化空間**などという.

【定理 2.13】 X を位相空間, $X/\sim$ をその商空間, $q : X \to X/\sim$ を商写像とする. このとき $X/\sim$ から位相空間 Y への写像 $\varphi : X/\sim \to Y$ が連続となるのは合成写像 $\varphi\circ q$ が連続となるとき, そのときに限る (図 2.14).

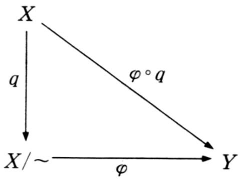


図 2.14 商位相

証明 合成写像 $\varphi\circ q$ が連続ならば, Y の開集合 O_Y に対して $(\varphi\circ q)^{-1}(O_Y) = q^{-1}\left(\varphi^{-1}(O_Y)\right)$ は開集合. このとき商位相の定義より $\varphi^{-1}(O_Y)$ は開集合で, したがって φ は連続である. 逆は連続写像の合成が連続であることから従う. ■

同値関係 $\sim$ の与えられている空間 X を定義域とする連続写像 $\varphi : X \to Y$ が各同値類を Y の一点に写すならば, 自然に写像 $\bar{\varphi} : X/\sim \to Y$ が定義されるが, 定理 2.13 よりこれは連続である. 特に連続写像 $\varphi : X \to Y$ に対して, X の同値関係 $x \sim x'$ を $\varphi(x) = \varphi(x')$ で定義すれば, 写像 $X/\sim \to Y$ は連続である. 例えば直積空間 $X \times Y$ における同値関係 $(x, y) \sim (x', y')$ を $x = x'$ で定義する. この関係は射影 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ の像が一致することと等しいから, 連続な全単射 $\varphi : X \times Y/\sim \to X$ が存在する. 一方, 自然な埋め込み $X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$ と商写像 $X \times Y \to X \times Y/\sim$ との合成が φ の逆写像を与えるから, 逆写像 φ^{-1} も連続. したがってこの同値関係による商空間 $X \times Y/\sim$ は X と同相である.

■ 例 2.20 ■ 球面 S^{n-1} (参照 例 1.28, p.31)

n 次元ユークリッド空間から原点を除いた空間 $X = \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ は直積空間 $S^{n-1} \times (0, \infty)$ と同相であったから, X の同値関係 $\sim$ を $x \sim \lambda x$, $\lambda > 0$ で定義したときの商空間 $X/\sim$ は $n-1$ 次元球面 S^{n-1} と同相である. □

■ 例 2.21 ■ 射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$

$n+1$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ から原点 0 を除いた $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の, 同値関係 $x\sim\lambda x$, $\lambda\neq 0$ による商空間を **$\boldsymbol{n}$ 次元射影空間**と呼び, $\boldsymbol{R}P^n$ でこれを表す. 射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ の点 p は, 商写像 $q:\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\boldsymbol{R}P^n$ による p の逆像に属する $(x_0,\cdots,x_n)\in q^{-1}(p)$ を用いて $[x_0,\cdots,x_n]$ と表されるが, この $x_0,\cdots,x_n$ を p の**同次座標**あるいは**斉次座標**と呼ぶ. n 次元球面 S^n が, $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の同値関係 $x\sim'\lambda' x$, $\lambda'>0$ による商空間であることから, n 次元射影空間は $S^n=\{(x_0,x_1,\cdots,x_n);\ \sum x_i^2=1\}$ において $(x_0,\cdots,x_n)$ と対蹠点 $(-x_0,\cdots,-x_n)$ とを同一視して得られる商空間と等しい. $\boldsymbol{R}P^n$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の直線の平行類の全体と見なすこともできるが, このとき二つの直線 ℓ, ℓ' のなす角 $\angle(\ell,\ell')$ は距離の公理を満たし, $\boldsymbol{R}P^n$ に位相を導く. 球面 S^n 上の二点 $x,y\in S^n$ の間の弧長による距離 $\tilde{d}(x,y)$ は, 原点 O が x, y を見込む角 $\angle xOy$ と等しいから (例 1.7, p.8), $\boldsymbol{R}P^n$ の点を $\bar{x}$, $\bar{y}$, 同値類 $\bar{x}$, $\bar{y}$ に属する S^n の点を $\pm x$, $\pm y$ とするとき, 距離 $\angle(\bar{x},\bar{y})$ は $\min\{\tilde{d}(x,y),\tilde{d}(x,-y)\}$ と一致する (図 2.15). よって商空間としての $\boldsymbol{R}P^n$ の位相は, 距離 $\angle$ による位相と同じものである.

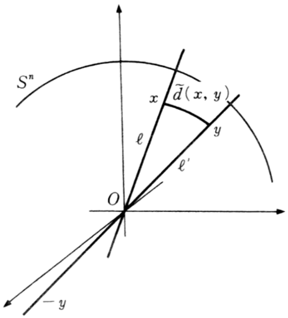


図 2.15

1 次元射影空間 $\boldsymbol{R}P^1$ を**射影直線**, 2 次元射影空間 $\boldsymbol{R}P^2$ を**射影平面**と呼ぶ. 射影直線 $\boldsymbol{R}P^1$ は円 S^1 と同相である. 写像 $\varphi:S^1\to S^1$ を $\varphi(\cos\theta,\sin\theta)=(\cos 2\theta,\sin 2\theta)$ で定義すれば, これは連続な全単射 $\bar{\varphi}:\boldsymbol{R}P^1\to S^1$ を導く. また $(\cos\eta_0,\sin\eta_0)$ の小さい近傍 U をとれば, U 上での $\bar{\varphi}$ の逆写像は, $U\to S^1$, $(\cos\eta,\sin\eta)\mapsto(\cos(\eta/2),\sin(\eta/2))$ と商写像 $S^1\to\boldsymbol{R}P^1$ との合成写像として与え

られるから連続. したがって $\boldsymbol{R}P^1$ と S^1 とは同相である. □

2.3.3 商空間の例

a) 部分集合を一点に縮めた空間

X を位相空間, A をその部分集合とする. このとき X における同値関係 $\sim_A$ を $x, y \in A$ のとき, そのときに限って $x \sim_A y$ として定義する. この同値関係による商空間 $X/\sim_A$ を X において **A を一点に縮めた空間**あるいは **A の点を同一視して得られる空間**と呼び, X/A でこれを表す (図 2.16).

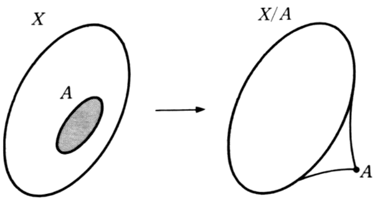


図 2.16 部分集合を一点に縮めた空間

■ 例 2.22 ■ 極座標

写像 $\varphi: S^{n-1} \times [0, \infty) \to \boldsymbol{R}^n$ を $\varphi(x, r) = rx$ で定義する. φ は $S^{n-1} \times \{0\}$ において 1 対 1 ではないから, 逆写像は定義されないが, 各点 $p \in \boldsymbol{R}^n$ に対する $\varphi^{-1}(p)$ の座標が一般次元の**極座標**と呼ぶべきものであろう. さて $S^{n-1} \times [0, \infty)$ において $S^{n-1} \times \{0\}$ を一点に縮めた空間 $S^{n-1} \times [0, \infty)/S^{n-1} \times \{0\}$ を X と書くと, φ は連続な全単射 $\bar{\varphi}: X \to \boldsymbol{R}^n$ を導く. この逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ が連続であり, したがって $\bar{\varphi}$ が同相写像となることを示す. 証明にはユークリッド空間の有界閉集合である球面 S^{n-1} の任意の点列が収束部分列を含むことを用いる (ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理, p.129). これはコンパクト空間の章の結果ではあるが, 実数空間における定理 (p.243) から容易に示される. 原点での $\bar{\varphi}^{-1}$ の連続性をいうには, $p_0 \in X$ を $S^{n-1} \times \{0\}$ の同値類, U を p_0 を含む開近傍とするとき, $\bar{\varphi}^{-1}$ による U の逆像 $(\bar{\varphi}^{-1})^{-1} = \bar{\varphi}(U)$ が $0 \in \boldsymbol{R}^n$ の近傍であることをいえばよい. 商写像を $q: S^{n-1} \times [0, \infty) \to X$ とするとき $\bar{\varphi}(U) = \varphi(q^{-1}(U))$ であり, $q^{-1}(U)$ は $S^{n-1} \times \{0\}$ を含む開集合であるから, 各 $x \in S^{n-1}$ に対して, x の $S^{n-1} \times [0, \infty)$ での ε_x-近傍 $U(x; \varepsilon_x)$ が $q^{-1}(U)$ に含まれるような $\varepsilon_x > 0$ が存在する. この

$U(x,\varepsilon_x)$ は, S^{n-1} での x の $\varepsilon_x/2$-近傍を V_x とするとき $V_x\times[0,\varepsilon_x/2)$ を含む (図 2.17). もしすべての $x\in S^{n-1}$ に対して $0<\delta<\varepsilon_x$ を満たす δ があれば, $\varphi(U)$ は $0\in \boldsymbol{R}^n$ の $\delta/2$-開球を含み, したがって 0 の近傍となる. そうでないとすると S^{n-1} の点列 $\{x_k\}$ であって $\varepsilon_{x_k}\to 0$ を満たすものが存在する. このとき S^{n-1} がユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合であることから, S^{n-1} の点に収束する部分点列 $x_{k'}$ を選ぶことができる. 極限を x_∞ とし $\varepsilon=\varepsilon_{x_\infty}$ とおくと, 十分大きい k' について $x_{k'}$ は x_∞ の $\varepsilon/2$-近傍に属するから $\varepsilon_{x_{k'}}\geq\varepsilon$. これは点列 x_k の選び方に反する. 以上より $q^{-1}(U)$ は $0\in\boldsymbol{R}^n$ の近傍であり, $\bar{\varphi}$ は同相写像である. 後にコンパクト性を用いた簡明な証明をもう一度述べる (例 4.15, p.139).

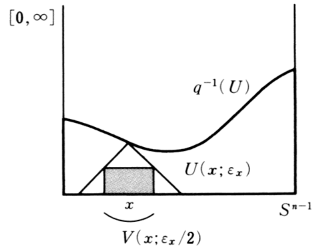


図 2.17　□

■ 例 2.23 ■ 球面 S^n

閉区間 $[0,1]$ において両端点 0, 1 を同一視して得られる空間 $[0,1]/\{0,1\}$ は円 $S^1 = \{(x,y);\ x^2+y^2 = 1\}$ と同相である. 同様に n 次元閉円板 $D^n = \{(x_1,\cdots,x_n);\sum x_i^2\leq 1\}$ において境界 $\partial D^n=S^{n-1}=\{(x_1,\cdots,x_n);\sum x_i^2=1\}$ を一点に縮めた空間 $D^n/\partial D^n$ は n 次元球面 S^n と同相である. これを 2 次元の場合に説明しよう (図 2.18). 写像 $\varphi: D^2\to S^2$ を $\varphi(x,y)=(2x\sqrt{1-r^2}, 2y\sqrt{1-r^2}, 2r^2-1)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ で定義する. $r<1$ のとき φ は 1 対 1 で, $r=1$ のとき $\varphi(x,y)=(0,0,1)$ であるから, φ は連続な全単射 $\bar{\varphi}: D^2/\partial D^2\to S^2$ を導く. 逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ について, $S^2\setminus\{(0,0,1)\}$ での連続性は φ の逆写像がこの部分集合上定義されて連続であることから従う. また $(0,0,1)$ での連続性, すなわち部分集合 ∂D^2 を含む D^2 の開集合の φ による像が S^2 における $(0,0,1)$ の近傍となることを示すには, 例 2.22(極座標) と同じく, ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理

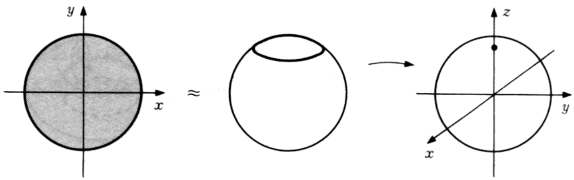


図 2.18

あるいはそれに相当する結果が必要である．詳細は読者に委ねる． □

b) 写像による同一視 I

X を位相空間とする．X の部分集合 A から X への写像 $\varphi: A \to X$ が与えられたとき，A の点 a とその像 $\varphi(a)$ を同一視して得られる空間を写像 φ **による等化空間**と呼び，X/φ で表す (図 2.19)．正確には関係 $a \sim \varphi(a)$ から生成される同値関係による商空間である．X の部分集合 A_i と写像 $\varphi_i : A_i \to X$ の族が与えられている場合も同様に商空間が定義される．

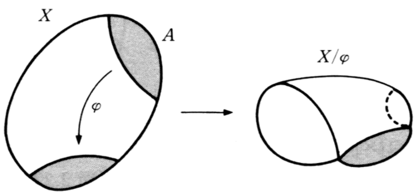


図 2.19　写像による同一視

■ **例 2.24** ■ **円環領域とトーラス** T^2

正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の二つの辺 $\{0\}\times[0,1]$ と $\{1\}\times[0,1]$ を写像 $\varphi(0,t)=(1,t)$ によって同一視して得られる空間を考える．閉区間の両端を同一視した $[0,1]/\{0,1\}$ は S^1 と同相であるから，この $[0,1]\times[0,1]/\varphi$ は $S^1\times[0,1]$ と同相で，またユークリッド平面の**円環領域** $\{(x,y);\ r_1 \leq x^2+y^2 \leq r_2\}$, $0<r_1<r_2$ とも同相であることがわかる．同様に $[0,1]\times[0,1]$ において，$(s,0)$ と $(s,1)$ および $(0,t)$ と $(1,t)$ とを同一視して得られる空間はトーラス $S^1\times S^1$ と同相である (図 2.20)．

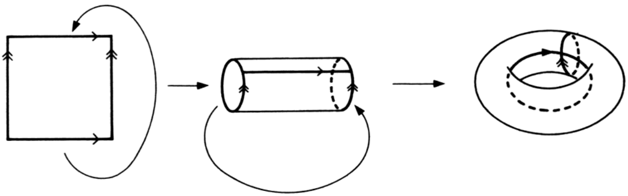


図 2.20 トーラス　□

■ 例 2.25* ■ メビウスの帯とクラインの壺

正方形 $[0,1]\times[0,1]$ において $(0,t)$ と $(1,1-t)$ を同一視して得られる空間を**メビウスの帯**と呼ぶ (図 2.21). メビウスの帯は円環領域 $S^1\times[0,1]$ の同値関係 $(x,y,t)\sim(-x,-y,1-t)$ による商空間と同相である. $\psi: S^1\times[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$,

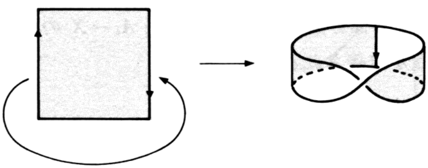


図 2.21 メビウスの帯

$(s,t)\mapsto(\cos\pi s,\sin\pi s,t)$ の導く写像 $\bar{\psi}: [0,1]\times[0,1]/\sim\ \to S^1\times[0,1]/\sim$ が同相写像となっている. 同じく正方形 $[0,1]\times[0,1]$ において $(s,0)$ と $(s,1)$ および $(0,t)$ と $(1,1-t)$ とを同一視して得られる空間を**クラインの壺**と呼ぶ (図 2.22). クラ

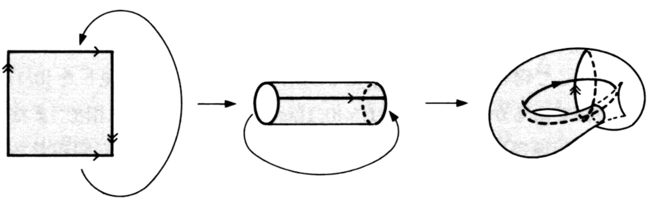


図 2.22 クラインの壺

メビウス: Augustus Ferdinand Möbius, 1790-1868.
クライン: Felix Klein, 1849-1925.

インの壺はトーラス $S^1\times S^1$ の同値関係 $(x,y,u,v)\sim(-x,-y,u,v)$ による商空間と同相である. 写像 $[0,1]\times[0,1]\to S^1\times S^1$, $(s,t)\mapsto(\cos\pi s,\sin\pi s,\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$ が求める同相写像を導くことは容易に確かめられる. □

c) 写像による同一視 II

位相空間 X,Y および X の部分集合 A から Y への連続写像 $\varphi: A\to Y$ が与えられたとき, X と Y との直和 $X\sqcup Y$ において $a\in A$ と $\varphi(a)\in Y$ とを同一視して得られる空間を $Y\cup_\varphi X$ で表し, φ によって X を Y に**貼り合わせた空間**あるいは**接着空間**と呼ぶ (図 2.23). 空間 X においてその部分集合 A を一点に縮めた空間 X/A は, A から一点よりなる集合 $\{*\}$ への写像 $\varphi: A\to\{*\}$ による接着空間 $\{*\}\cup_\varphi X$ と等しい.

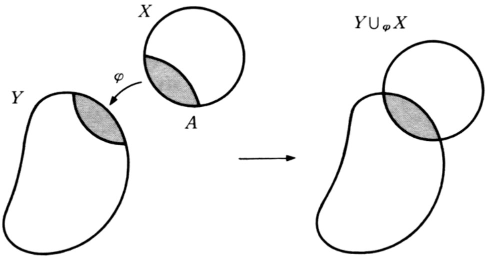


図 2.23 写像による同一視

■ 例 2.26 ■ リーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$

二つの複素平面 $\boldsymbol{C}$ を, 写像 $\varphi: \boldsymbol{C}\setminus\{0\}\to\boldsymbol{C}$, $w\mapsto\dfrac{1}{w}$ によって貼り合わせた空間 $\boldsymbol{C}\cup_\varphi\boldsymbol{C}$ を**リーマン球面**と呼ぶ. もとの複素平面 $\boldsymbol{C}$ に新たに加えられた点は, φ の定義域に属していない $0\in\boldsymbol{C}$ のみであり, この点はもとの複素平面からは $\infty=\dfrac{1}{0}$ と見えることから, リーマン球面を $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ で表す. リーマン球面が 2 次元球面と同相であることを証明しよう. 球面 $S^2=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2=1\}$ の北極に当たる点を $N=(0,0,1)$ とし, 各 $p\in S^2\setminus\{N\}$ に対して, N と p を結ぶ直線と平面 $\boldsymbol{R}^2=\{(x,y,0); x,y\in\boldsymbol{R}\}$ との交点を対応させる写像 $st: S^2\setminus\{N\}\to\boldsymbol{R}^2$ を**立体射影**と呼ぶ (図 2.24). 複素平面 $\boldsymbol{C}$ をユークリッド平面 $\boldsymbol{R}^2$ と自然に同一視

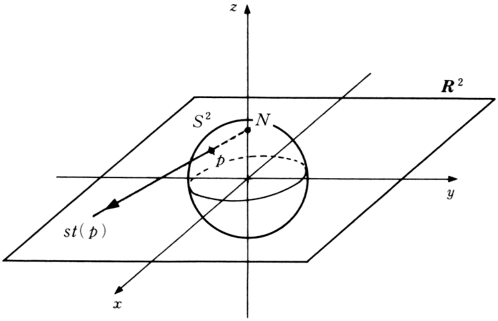


図 2.24　立体射影

すれば, st は具体的に $st(x,y,z)=\dfrac{x}{1-z}+\dfrac{y}{1-z}\sqrt{-1}$ と表される. これより st は連続で, 逆写像も $st^{-1}(u+v\sqrt{-1})=\left(\dfrac{2u}{u^2+v^2+1},\dfrac{2v}{u^2+v^2+1},\dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$ と表されることから連続である. この同相写像 st を $st(N)=\infty$ と定義することによって, S^2 から $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ への写像に拡張したものを同じ記号 st で表す. 拡張した立体射影 st が北極 N においても双連続であることをいえば, リーマン球面と S^2 とが同相であることが従う. $st(N)=\infty$ の近くでは $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ の座標は $\dfrac{1}{w}$ で与えられるから, st の表示は $\dfrac{1}{st(x,y,z)}=\dfrac{x(1-z)}{x^2+y^2}-\dfrac{y(1-z)}{x^2+y^2}\sqrt{-1}=\dfrac{x}{1+z}-\dfrac{y}{1+z}\sqrt{-1}$ となるが, これは南極 $(0,0,-1)$ からの立体射影の複素共役をとる写像の表示にほかならない. よって拡張した立体射影は北極 N においても双連続である. □

■ 例 2.27* ■ 曲面の連結和

二つの曲面 Σ, Σ' が与えられたとき, おのおのから 2 次元円板の内部, 正確には埋め込み $\iota: D^2\to\Sigma$, $\iota': D^2\to\Sigma$ の像 $\iota(D^2)$, $\iota'(D^2)$ の内部を取り除き, 残った曲面を $\iota(\partial D^2)$ と $\iota'(\partial D^2)$ とで貼り合わせて得られる曲面を Σ と Σ' の**連結和**と呼ぶ (図 2.25). 連結和には記号 $\Sigma\#\Sigma'$ を用いる習慣である. この構成は埋め込み ι, ι' のとりかたによらないことが知られている. 図 2.25 は二つのトーラス T^2 の連結和を表すが, これを**種数** 2 の曲面という. 連結和が D^2 の埋め込みによらないことを仮定すれば, 種数 2 の曲面を以下のように多角形の辺の同一視に

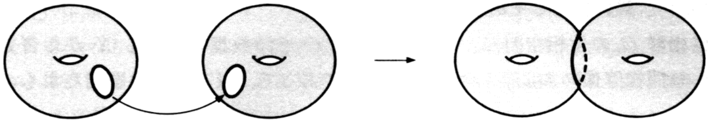


図 2.25 連結和

よって与えることもできる．まず $T^2 \approx [0,1]\times[0,1]/\sim$ であるから，$T^2 \backslash \mathrm{Int}(\iota(D^2))$ は 五角形の四辺を図 2.26 のように同一視して得られる．これを二つ用意して，先に $\partial\iota(D^2)$ と $\partial\iota'(D^2)$ に対応する部分を貼り合わせれば，種数 2 の曲面が，八角形の辺を図 2.27 のように同一視して得られることがわかる．同じくトーラス

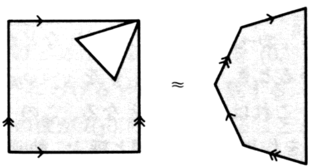


図 2.26

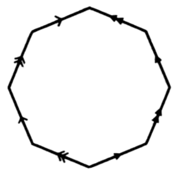


図 2.27

T^2 の g 個の連結和 $\overbrace{T^2\#\cdots\#T^2}^{g}$ として表される曲面を**種数** g の曲面と呼ぶ (図 2.28)．トーラス T^2 の種数は 1 であり，また球面 S^2 の種数は 0 と定義する．これは，S^2 が二つの閉円板の境界を同一視して得られる空間であり，したがって任意の曲面 Σ に対して $\Sigma\#S^2\approx\Sigma$ を満たすことと対応している．

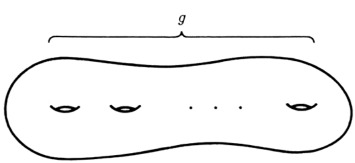


図 2.28 種数 g の曲面 □

2.3.4* 群の作用とその商空間

位相群 G の位相空間 X への**作用**とは, G を添数集合とする X から自分自身への同相写像の族 $\varphi_g : X \to X,\ g \in G$ であって，以下の条件を満たすものをいう.

(G$_1$) 単位元 $e \in G$ に対して $\varphi_e = \mathrm{id}_X$.

(G$_2$) $g, h \in G$ に対して $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$.

(G$_3$) 写像 $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto \varphi_g(x)$ は連続.

G が抽象群, すなわち位相構造をもたない場合には (G$_1$), (G$_2$) を満たす族を G の作用と呼ぶ. これは G に離散位相を入れて位相群と見なしたときの条件と同じである. 作用の典型例として, 位相群 G への G 自身あるいはその部分群 H の作用である**左移動** $L_h : G \to G,\ x \mapsto hx,\ h \in H$, 一般線形群およびその部分群のユークリッド空間への作用 $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n,\ x \mapsto Ax,\ A \in GL(n; \boldsymbol{R})$ などがある.

群 G が位相空間 X に作用しているとき, 関係 $x \sim_G y$ を $y = \varphi_g(x)$ を満たす $g \in G$ が存在することで定義すれば, これは同値関係となる. この $\sim_G$ による同値類を $x \in X$ の**軌道**といい, 商空間を作用の**軌道空間**と呼ぶ. 軌道空間は X/G あるいは $G \backslash X$ で表す習慣である. 特に位相群 G の, 閉部分群 H による左移動の作用による商空間を**等質空間**と呼ぶが, この名前の由来はその等質性による.

■ **例 2.28** ■ **トーラス** T^2　(参照 例 2.24, p.91)

整数全体のなす無限巡回群 $\boldsymbol{Z}$ は移動 $x \mapsto x + n$ によって実数空間 $\boldsymbol{R}$ に作用するが, その軌道空間 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は S^1 と同相である. 写像 $\varphi : \boldsymbol{R} \to S^1,\ \varphi(x) = (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$ の導く $\bar{\varphi} : \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to S^1$ が同相写像である. 逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ の連続性は, 各点 $(\cos\theta_0, \sin\theta_0) \in S^1$ の小さい近傍 U をとったとき, その上で $\bar{\varphi}^{-1}$ が, 写像 $U \to \boldsymbol{R},\ (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \dfrac{\theta}{2\pi}$ と商写像との合成で与えられることによる.

同じく階数 2 の自由アーベル群 $\boldsymbol{Z}^2$ はユークリッド平面 $\boldsymbol{R}^2$ に平行移動によって作用するが, $\boldsymbol{Z}^2 \cong \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{R}^2$ より, その商空間 $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ はトーラス $S^1 \times S^1 \approx \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ と同相である. これは次のように説明することもできる. $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A = [0,1] \times [0,1]$ を考えると, A の $\boldsymbol{Z}^2$ の元による平行移動の像 $A_{n,m} = A + (n, m),\ (n, m) \in \boldsymbol{Z}^2$ は全体として平面 $\boldsymbol{R}^2$ を覆う, すなわち

アーベル: Niels Henrik Abel, 1802-1829.

$\boldsymbol{R}^2 = \bigcup A_{n,m}$ が成立する．また $A = A_{0,0}$ と $A_{n,m}$, $(n,m) \neq (0,0)$ との共通部分は境界 $\partial A = [0,1] \times \{0,1\} \cup \{0,1\} \times [0,1]$ に含まれ，しかも $A_{0,0} \cap A_{n,m} \neq \emptyset$ なる (n,m) は有限個しかない．このような A を作用の**基本領域**と呼ぶ (図 2.29)．基本領域 A の同値関係を，適当な元 $(n,m) \in \boldsymbol{Z}^2$ による作用で移りあうこととして定めれば，この同値関係による A の商空間 $A/\sim$ は軌道空間 $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ と同相となる．まず包含写像 $\iota : A \hookrightarrow \boldsymbol{R}^2$ は，定義により連続な全単射 $\bar{\iota} : A/\sim \to \boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ を導く．各点 $\bar{p} \in A/\sim$ に対して，$\bar{p}$ の任意の近傍の $\bar{\iota}$ による像が $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ における $\bar{\iota}(\bar{p})$ の近傍であることをいえば 逆写像 $\bar{\iota}$ の連続性が示される．$\bar{p}$ を表す正方形 A の点を p とする．p が正方形の内部 $(0,1) \times (0,1)$ に含まれる場合には，小さい ε に対して p の ε-近傍の包含写像 ι による像が $\boldsymbol{R}^2$ における ε-近傍と一致するからこれは正しい．p が A の辺，例えば $(0,1) \times \{0\}$ に属す場合，$\bar{p}$ を表すもう一つの点を $p' \in (0,1) \times \{1\}$ とする．小さい ε に対して p の A での ε-近傍の ι による像と，p' の ε-近傍の ι による像を $(0,-1) \in \boldsymbol{Z}^2$ で移動した集合を合わせれば $\iota(p)$ の $\boldsymbol{R}^2$ における ε-近傍と一致する．p が頂点に一致する場合にも，同様に任意の近傍の像が $\iota(p)$ の近傍となることが証明できるから，$\bar{\iota} : A/\sim \to \boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ は同相写像である．基本領域 $A = [0,1] \times [0,1]$ における同値関係は $(0,t) \sim (1,t)$, $(s,0) \sim (s,1)$ で与えられるから，$A/\sim \approx \boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ はトーラスである．

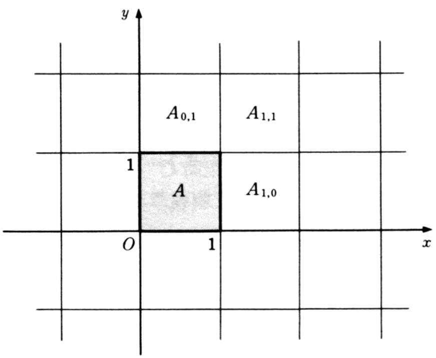


図 2.29 基本領域 □

■ **例 2.29** ■ **射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$**　(参照例 2.21, p.88)

射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ は n 次元球面 S^n から自分自身への写像 $\varphi_n : S^n \to S^n, (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (-x_1, \cdots, -x_{n+1})$ による等化空間 S^n/φ_n と見なすことができる. この φ_n は $\varphi_n^2 = \varphi_n \circ \varphi_n = \mathrm{id}_{S^n}$ を満たすから, S^n/φ_n は位数 2 の巡回群 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ の作用による軌道空間でもある. この作用に対して上半球面 $S_+^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}); \sum x_i^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\}$ は基本領域をなすが, S_+^n は射影 $\mathrm{pr} : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^n$ によって n 次元閉円板 $D^n = \{(x_1, \cdots, x_n); \sum x_i^2 \leq 1\}$ と同相. これより射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ は D^n の商空間 $D^n/\sim$ と同相となるが, 境界における同値関係 $\sim$ は $n-1$ 次元射影空間 $\boldsymbol{R}P^{n-1}$ を定義する商写像 $q : S^{n-1} \to \boldsymbol{R}P^{n-1}$ による像の一致で与えられる. したがってこの商写像 q によって D^n を $\boldsymbol{R}P^{n-1}$ に貼りつけた空間 $\boldsymbol{R}P^{n-1} \cup_q D^n$ は射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ と同相である (図 2.30).

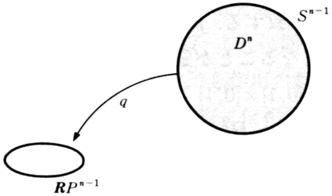


図 2.30　射影空間　□

■ **例 2.30** ■ **対称積**

$\mathfrak{S}_n$ を **n 次対称群**, すなわち n 個の文字 $\{1, \cdots, n\}$ の置換 $\tau : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ 全体のなす群とする. n 次対称群は $\boldsymbol{C}^n$ に座標の入れ換え, $\tau : z = (z_i) \mapsto (z_{\tau(i)})$ によって作用する. この作用による商空間 $\boldsymbol{C}^n/\mathfrak{S}_n$ を $\boldsymbol{C}$ の **n 次対称積**と呼ぶが, この空間は $\boldsymbol{C}^n$ と同相である. $\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z)$ を $z_1, \cdots, z_n$ の**基本対称式**, すなわち w の多項式 $(w+z_1) \cdots (w+z_n)$ を展開したときの $w^{n-1}, \cdots, w, 1$ の係数, 具体的には $\sigma_1(z) = z_1 + \cdots + z_n$, $\sigma_2(z) = \sum_{i<j} z_i z_j = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n$, $\cdots$, $\sigma_n(z) = z_1 \cdots z_n$ とし, これを用いて写像 $\varphi : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ を $\varphi(z) = (\sigma_1(z), \cdots, \sigma_n(z))$ によって定義する. この写像は連続であり, しかも $\varphi(\tau(z)) = \varphi(z)$ を満たすから, 連続写像 $\bar{\varphi} : \boldsymbol{C}^n/\mathfrak{S}_n \to \boldsymbol{C}^n$ を導く. 係数を与えれば根の組は決まるから $\bar{\varphi}$ は単射であり, 代数学の基本定理 (例 4.11, p.133), すなわち任意

の多項式が複素数の範囲に根をもつことを認めれば $\bar{\varphi}$ は全射でもある. さらに多項式の根の係数に関する連続性から (例 1.18, p.18), 逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ は連続であり, n 次対称積 $\boldsymbol{C}^n/\mathfrak{S}_n$ と n 次元複素空間 $\boldsymbol{C}^n$ が同相であることが従う. これから $\boldsymbol{C}^n$ 上の連続関数で, 変数の入れ換えに関して不変なものは, すべて基本対称式の連続関数として表されることがわかる. □

■ **例 2.31** ■ **球面** S^{n-1}

直交群 $O(n;\boldsymbol{R})=\{A\in GL(n;\boldsymbol{R});{}^tAA=E\}$ は一般線形群の部分群であるから n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に作用するが, $O(n;\boldsymbol{R})$ の各元がユークリッドの距離を保つことから $n-1$ 次元球面 $S^{n-1}=\{x;\ \|x\|=1\}$ は $O(n;\boldsymbol{R})$ の作用によって不変であり, したがって $O(n;\boldsymbol{R})$ は S^{n-1} に作用すると考えることができる. この作用は**推移的**, すなわち任意の $x,y\in S^{n-1}$ に対して適当な $A\in O(n;\boldsymbol{R})$ をとれば $y=Ax$ が成立する. さて $x_0=(1,0,\cdots,0)\in S^{n-1}$ に対し, その**等方部分群**, すなわち x_0 を動かさない $O(n;\boldsymbol{R})$ の元の全体は $O(n-1;\boldsymbol{R})$ に等しい. したがって連続な全単射 $\varphi:O(n;\boldsymbol{R})/O(n-1;\boldsymbol{R})\to S^{n-1}$ が存在するが, この φ は同相写像である. 証明はコンパクト空間の章に譲る (例 4.17, p.140). □

2.3.5* 準距離空間

空間 X と自分自身との直積 $X\times X$ 上の実数値関数 $d^*:X\times X\to\boldsymbol{R}$ が**準距離関数**あるいは**擬距離関数**であるとは, d^* が次の三条件を満たすときをいう.

(D_1^*) $d^*(x,y)\geq 0$.

(D_2^*) $d^*(x,y)=d^*(y,x)$.

(D_3^*) $d^*(x,z)\leq d^*(x,y)+d^*(y,z)$.

このとき対 (X,d^*) を**準距離空間**あるいは**擬距離空間**と呼ぶ. 距離関数との違いは $d^*(x,y)=0$ から $x=y$ が導かれないことだけである.

【定理 2.14】 (X,d^*) を準距離空間とするとき, $x\sim y$ を $d^*(x,y)=0$ で定義すればこれは同値関係であり, 準距離関数 d^* は商集合 $X/\sim$ 上の距離関数を自然に定義する.

証明　関係 $\sim$ が反射律, 対称律を満たすことは自明. 推移律について $x\sim y$, $y\sim z$ であれば三角不等式より $d^*(x,z)\leq d^*(x,y)+d^*(y,z)=0$ となり $x\sim z$ が得られる. さて商集合の二点 $\bar{x},\bar{y}\in X/\!\sim$ に対し, 代表元 $x\in\bar{x}$, $y\in\bar{y}$ を選んで $d(\bar{x},\bar{y})=d^*(x,y)$ と定義する. このとき x_1, x_2 がともに $\bar{x}$ の代表元であれば, 三角不等式より $d^*(x_1,y)\leq d^*(x_1,x_2)+d^*(x_2,y)=d^*(x_2,y)$ で, 同様に $d^*(x_2,y)\leq d^*(x_1,y)$ でもあるから, $d(\bar{x},\bar{y})$ の定義は代表元 x のとり方によらない. もう一方の代表元 y によらないことも同じく示される. このように定義した関数 d が距離関数の公理 (D_1)~(D_3) を満たすことは明らかであろう. ■

■ 例 2.32 ■ 可積分関数の空間 $L^1[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の可積分関数の全体を考える. ここではルベーグ積分を考えているが, この例で扱う内容に関しては, リーマン積分であっても本質的な違いはない. 可積分関数 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ に対して

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$$

と定義すれば, これはノルムの条件のうち $\|f\|_1=0$ から $f=0$ が導かれることを除いてはすべて満足する. 例えば関数 $f(t)$ を $f(t)=0,\ t\neq 0,\ f(0)=1$ で定義すれば, この $f(t)$ は可積分であり $\|f\|_1=0$ を満たすが $f=0$ ではない. したがってこの $\|\ \|_1$ を用いて $d_1^*(f,g)=\|f-g\|_1$ によって定義した d_1^* は $[0,1]$ 上の可積分関数全体のなす空間上の準距離関数となる. しかしながら通常 $[0,1]$ 上の可積分関数というときには, 可積分関数それ自体ではなく, この準距離 d_1^* によって定理 2.14 で定義された同値関係 $\sim$ による同値類を指す. 二つの関数 f,g が同値であるのは $\displaystyle\int_0^1|f(t)-g(t)|dt=0$, したがってほとんど至るところ $f(x)$ と $g(x)$ の値が等しい場合であり, このような関数を同一視した集合が商空間である. この商空間を $L^1[0,1]$ と書けば, $\|\ \|_1$ は $L^1[0,1]$ 上のノルムであり, $d_1(f,g)=\|f-g\|_1$ は $L^1[0,1]$ 上の距離関数となる. また先に述べた言葉の混同によって, この $L^1[0,1]$ を $[0,1]$ 上の可積分関数全体のなす空間と呼ぶ.

同様の意味での $[0,1]$ 上の p 乗可積分関数, $1\leq p\leq\infty$, の全体の空間を $L^p[0,1]$ と書くが, この線形空間には p 次ノルム

$$\|f\|_p=\left(\int_0^1|f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

が定義されている (参照 ミンコウスキの不等式, p.250). ただし $p=\infty$ に対する $\|f\|_\infty$ は本来の上限 $\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|$ ではなく m を $[0,1]$ 上のルベーグ測度として

$$\|f\|_\infty \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le 1}|f(t)| \;=\; \sup\{a\in \boldsymbol{R};\ m(\{t;\ |f(t)|\ge a\})>0\}$$

で定義される**本質的上限**をさす. 連続関数 f に対しては上限 $\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|$ と $\|f\|_\infty$ の値は一致するけれども, 一般の可測関数に関してはこの限りではない. 通常 $L^\infty[0,1]$ と書くときには, ここで定義した $\|f\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}|f|$ の値が有限であるような $[0,1]$ 上の可測関数の全体を表す. □

■ **例 2.33** ■ **トーラス** T^2　(参照 例 2.24, p.91)

前項で扱った軌道空間のうち, 群の作用が適当な条件を満たすものは, 準距離空間から自然に定義される距離空間と見なすこともできる. これを $\boldsymbol{Z}^2$ の $\boldsymbol{R}^2$ への平行移動による作用 $\varphi_{(n,m)}(x,y)=(x+n,y+m)$ の場合に説明しよう. $\boldsymbol{R}^2$ 上の準距離を $d^*(p,q)=\min_{(n,m)}\left\{d\left(p,\varphi_{(n,m)}(q)\right)\right\}$ で定義する. この準距離から定理 2.14 で定義された同値関係 $\sim$ による同値類は $\boldsymbol{Z}^2$ の作用による軌道と一致するから, 軌道空間 $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ 上距離関数 d が定義されたこととなる. 準距離 d^* による $p\in\boldsymbol{R}^2$ の ε-近傍は p の軌道上の点 p' の ε-近傍全体の和と一致するから, d^* の導く $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ の距離 d による $\bar{p}\in\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ の近傍は商位相としての近傍でもある. 一方で商位相に関する $\bar{p}$ の近傍の, 商写像 $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ による逆像は, $\boldsymbol{Z}^2$ の作用に関して不変であることから, 適当な $\varepsilon>0$ に対して, $\bar{p}$ に属する $p\in\boldsymbol{R}^2$ の d^* に関する ε-近傍を含む. d による近傍の概念と商位相による近傍の概念が一致したから, これらは同じ位相を $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ に定義する. □

<まとめ>　位相空間の和, および商集合として与えられた空間に位相を導入した. これらの空間を値域とする自然な写像あるいは写像の族を連続とするような最強の位相がその定義である. このうち商空間の具体例として, 球面, 射影空間, トーラスなど幾何学的なものを多く挙げて解説した. また位相群の作用による軌道空間, 準距離によって定義される空間についても触れた.

[例題]　メビウスの帯を $M=S^1\times[-1,1]/\sim$, $(x,y,t)\sim(-x,-y,-t)$ とし, 円板の境界 $\partial D^2=S^1$ から M への写像を $\varphi(x,y)=(x,y,1)$ で定義する. このとき φ に

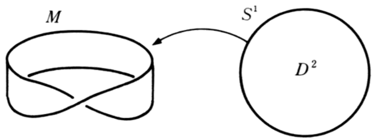


図 2.31　射影平面

よる接着空間 $M\cup_\varphi D^2$ は射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$ と同相であることを示せ (図 2.31).

(解)　写像 $\psi_1: S^1\times[-1,1]\to S^2$ を $\psi_1(x,y,t)=\left(\dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{2}}x, \dfrac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{2}}y, \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$, 写像 $\psi_2: D^2\to S^2$ を $\psi_2(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}x, \dfrac{1}{\sqrt{2}}y, \dfrac{\sqrt{2-x^2-y^2}}{\sqrt{2}}\right)$ で定めれば, ψ_1, ψ_2 によって定義される $\psi: S^1\times[-1,1]\cup D^2\to S^2$ は連続な全単射 $\bar\psi: M\cup_\varphi D^2\to \boldsymbol{R}P^2$ を導く. 点 $p\in S^1\times[-1,1]\cup D^2$ が $S^1\times(-1,1]\cup D^2$ に属する場合, p の近傍の ψ による像は S^2 における $\psi(p)$ の近傍であるから, p の同値類を $\bar p\in M\cup_\varphi D^2$ と書けば, $\bar\psi$ の逆写像 $\bar\psi^{-1}$ は $\bar\psi(\bar p)$ で連続である. また p が $S^1\times\{-1\}$ に属する場合, p と同値な $p'\in S^1\times\{1\}$ が存在するから, 同じく $\bar\psi^{-1}$ は $\bar\psi(\bar p)$ で連続である. したがって $\bar\psi: M\cup_\varphi D^2\to \boldsymbol{R}P^2$ は同相写像である. ■

章　末　問　題

1.　抽象群 G に位相群としての構造を定義する. 単位元 $e\in G$ に対して G の部分集合族 $\mathfrak{U}^*(e)$ を G の指数有限の正規部分群の全体とし, 一般の $g\in G$ に対しては $\mathfrak{U}^*(g)=\{gN;\ N\in\mathfrak{U}^*(e)\}$ とおく.

(1)　この族 $\mathfrak{U}^*(g)$ が基本近傍系の条件 $(\mathrm{U}_1^*)\sim(\mathrm{U}_5^*)$ を満たすことを示せ. これによって定義される G の位相を**クルル位相**と呼ぶ.

(2)　クルル位相のもとで G が位相群をなすことを示せ.

(3)　$\boldsymbol{Q}$ のクルル位相を決定せよ.

2.　空間 X の一点 p が可算基本近傍系をもつと仮定する. このとき X から他の空間 Y への写像 $\varphi: X\to Y$ が点 p で連続となるのは, p に収束する任意の点列 $\{p_n\}$ に対して, その像で与えられる点列 $\{\varphi(p_n)\}$ が $\varphi(p)$ に収束するとき, そのときに限る. これを証明せよ.

クルル: Walfgang Krull, 1899-1970.

3. 非可算集合 X の開集合系を $\mathfrak{O}=\{\emptyset\}\cup\{O;\ X\setminus O$ は高々可算$\}$ で定義する．このとき以下を示せ．

(1) $\mathfrak{O}$ は開集合の公理を満たす．

(2) この位相の下で点列 $\{p_n\}$ が $p\in X$ に収束するならば，ある番号以上のすべての p_n について $p_n=p$ が成立する．

(3) 同じ集合 X の離散位相を $\mathfrak{P}(X)$ で表す．X の点列 $\{p_n\}$ が位相 $\mathfrak{O}$ のもとで p に収束するならば離散位相 $\mathfrak{P}(X)$ のもとでも p に収束するけれども，恒等写像 $\mathrm{id}:(X,\mathfrak{O})\to(X,\mathfrak{P}(X))$ は各 $p\in X$ で連続ではない．

4. なめらかな関数の空間 $C^\infty[0,1]$ に C^∞ 位相を入れる (参照例 2.4, p.66)．

(1) この位相は包含写像 $C^\infty[0,1]\hookrightarrow C[0,1]$ および微分作用素 $D:C^\infty[0,1]\to C^\infty[0,1]$ がともに連続となる位相のうち最も弱いものであることを示せ．ただし $C[0,1]$ には一様ノルム $\|\ \|_\infty$ による位相がはいっている．

(2) この位相を導く距離関数の存在を示せ．

5. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の，半径が正の閉円板全体のなす集合を X とする．各点 $p\in\boldsymbol{R}^2$ に対し，p を内部に含む円板全体のなす部分集合を $O_p\subset X$，p を含まない円板全体のなす部分集合を $O'_p\subset X$ とし，これらの全体 $\{O_p\}_{p\in R^2}\cup\{O'_p\}_{p\in R^2}$ で生成される開集合系を $\mathfrak{O}$ とする．一方で X に属する円板 $A\in X$ に対して，その中心を $(c_x(A),c_y(A))$，半径を $r(A)$ と書くとき，写像 $\iota:A\mapsto(c_x(A),c_y(A),r(A))$ によって X は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間と見なすことができる．このとき開集合系 $\mathfrak{O}$ による位相と写像 ι による相対位相は等しいことを示せ．

6. 位相空間 X 上の実数値関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ で，任意の $b\in\boldsymbol{R}$ に対し $\{x;f(x)<b\}$ が開集合となるものを**上半連続**と呼ぶ．同様に任意の $a\in\boldsymbol{R}$ に対し $\{x;f(x)>a\}$ が開集合となるとき f を**下半連続**と呼ぶ．

(1) X 上の連続関数の族 $\{f_\lambda\}$ の下限として与えられる関数 $f(x)=\inf_\lambda f_\lambda(x)$ は，各点 $x\in X$ で定義されていれば上半連続となる．これを示せ．

(2) 上半連続関数は必ずしも連続ではない．反例を構成せよ．

7. 距離空間上の関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ に対して次の三条件が同値であることを示せ．

(i) $f:X\to\boldsymbol{R}$ は上半連続．

(ii) 収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\limsup_{n\to\infty} f(x_n)\leq f(\lim x_n)$．

(iii) 収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\liminf_{n\to\infty} f(x_n)\leq f(\lim x_n)$．

8. 積空間から成分への射影 $\mathrm{pr}_X:X\times Y\to X$ は開写像であることを示せ．

9. 次の空間は第一可算公理を満たさないことを示せ．

(1)　A を密着位相以外の位相をもつ位相空間とするとき，そのコピー $A_\lambda = A$ の非可算個の直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

(2)　自然な埋め込み $\boldsymbol{R} \hookrightarrow \boldsymbol{R}^2$, $x \mapsto (x,0)$ によって $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合と見なしたときの商空間 $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{R}$.

10. 次の写像 (族) によって自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ に誘導される位相は離散位相と一致するかどうかを調べよ．値域の $\boldsymbol{R}$ および $\boldsymbol{Z}$ には通常の位相がはいっているものとする．

(1)　$f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n}$.

(2)　$g_p : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}$, $n \mapsto n \bmod p$.　ただし p は素数全体を動く．

11. 実数空間 $\boldsymbol{R}$ において閉区間 $[a,b]$ を一点に縮めた空間 $\boldsymbol{R}/[a,b]$ はどのような空間か．また開区間 (a,b) を一点に縮めた空間 $\boldsymbol{R}/(a,b)$ はどのような空間か．

12. 射影平面二つの連結和 $\boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2$ はクラインの壺と同相であることを示せ．

13. $\boldsymbol{Z}^2$ の $\boldsymbol{R}^2$ への作用を $\varphi_{(n,m)}(x,y) = \left(x+n+\dfrac{1}{2}m, y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}m\right)$ で定める．

(1)　この作用の軌道空間は 2 次元トーラス T^2 と同相であることを示せ．

(2)　原点を $O=(0,0)$ に対して $A=\{p;\ d(p,O) \leq d(\varphi_{(n,m)}(p),O)\}$ によって与えられる部分集合 A がこの作用の基本領域をなすことを確認し，境界 $\dot{A}$ に定義される同値関係を調べよ．ただし d はユークリッドの距離である．

14. 正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ は原点 O を中心とする $\pi/2$ の正の回転に対し不変であるから，これによって位数 4 の巡回群 $\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ の $[-1,1]\times[-1,1]$ への作用が定義される．トーラス T^2 を，この正方形の同値関係 $(s,-1)\sim(s,1)$ および $(-1,t)\sim(1,t)$ による商空間と見なすとき以下を示せ．

(1)　巡回群 $\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ は自然に T^2 に作用する．

(2)　T^2 への $\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ のこの作用による商空間は球面 S^2 と同相である．

3

分離公理と距離化定理

距離空間の章では写像の連続性を点列を用いて定義したが，これが有効であるのは収束点列の極限が一意に定まることによる．異なる二点間の距離が正であって，点列は同時に双方に収束することができないからである．一般の位相空間において，同様に点列の極限の一意性を保証するためには，異なる二点が交わらない近傍をもつことが要求される．しかしすべての位相空間がこの性質を満たすわけではなく，必要ならば公理として仮定しなければならない．これがハウスドルフの分離公理である．ほかにも点と部分集合，あるいは二つの部分集合についての分離公理がいくつかあるが，いずれも距離空間と一般の位相空間との差を測る意味がある．この章では重要な二，三の分離公理と，空間の位相が距離関数によって与えられるための十分条件を述べる．距離空間が基本的な分離公理を満たすことを述べた最初の 3.1.1 項以外はやや専門的であるので，距離化定理やコンパクト空間の章で扱うパラコンパクト性などに関心のない読者は飛ばしてもよい．

3.1　分離公理

位相空間に対して定義される**分離公理**には種々のものがあるが，そのうちでもハウスドルフとティーツェの分離公理が特に重要である．この節では距離空間がこれらの公理を満足すること，また位相空間に対する他の分離公理とその間の相互関係について述べる．

ティーツェ: Heinrich Tietze, 1880-1964.

3.1.1　距離空間における分離公理

距離空間が一般の位相空間に比して扱いやすい点の一つに, 距離関数を用いて種々の関数を容易に構成できることがある. この項では点や部分集合を分離する関数を具体的に求め, これを用いて点, 部分集合を開集合によって分離する.

X を距離空間, p, q を X の異なる二点とする. このとき距離関数 d によって

$$f(x) = \frac{d(x,p)}{d(x,p)+d(x,q)}$$

で与えられる連続関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ は $0 \leq f(x) \leq 1$ および $f^{-1}(0)=\{p\}$, $f^{-1}(1)=\{q\}$ を満足する. すなわち距離空間上の任意の異なる二点は連続関数で分離できる. 特に $U_p=\{x\ ;\ f(x)<1/3\}$, $U_q=\{x\ ;\ f(x)>2/3\}$ とおけば, これらは $p \in U_p$, $q \in U_q$ なる開集合であり, かつ $U_p \cap U_q = \emptyset$ を満たす (図 3.1).

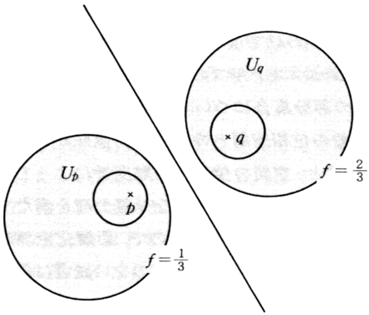


図 3.1　点の分離

一般に位相空間 X において, 任意の異なる二点 p, q に対して $p \in U_p$, $q \in U_q$ かつ $U_p \cap U_q = \emptyset$ を満たすような開集合 U_p, U_q が存在するとき, X は**ハウスドルフ**である, あるいは**第二分離公理 $\mathbf{T_2}$** を満たすという. すなわち

【命題 3.1】　距離空間はハウスドルフ空間である.

距離関数を用いて二点を分離する開集合を構成したが, 次に点と部分集合との距離を定義し, これを用いて二つの部分集合を分離することを考える. X を距離

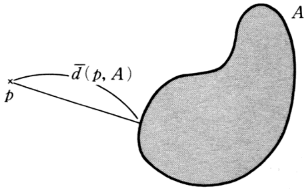


図 3.2 点と部分集合との距離

空間, d をその距離関数とする. このとき X の点 x と部分集合 A との**距離**を

$$\bar{d}(x, A) \ = \ \inf_{a \in A} d(x, a)$$

で定義する (図 3.2). 三角不等式 $d(x,a) \leq d(x,y)+d(y,a)$ の左辺において a が A の元を動くときの下限をとれば $\bar{d}(x,A) \leq d(x,y)+d(y,a)$. 左辺は a によらない数となったから, もう一度, 今度は右辺の $a \in A$ に関する下限をとれば $\bar{d}(x,A) \leq d(x,y)+\bar{d}(y,A)$. 二点 x, y を入れ換えてもこの式は正しいから, 結局

$$|\bar{d}(x, A) - \bar{d}(y, A)| \ \leq \ d(x, y)$$

が成立する. したがって部分集合 A との距離を与える関数 $\bar{d}(\cdot, A)$ は X 上連続. また $\bar{d}(x,A) < \varepsilon$ と x の ε-近傍に A の点が存在することは同値であるから, $\bar{d}(x,A)=0$ なる点 x の全体は A の閉包 $\overline{A}$ と一致する. 特に A が閉集合である場合には, 関数 $\bar{d}(\cdot, A)$ は A 以外の点においては正の値をとる.

【命題 3.2】 X を距離空間, F をその閉部分集合とする. このとき連続関数 $f: X \to [0, \infty)$ であって $F = f^{-1}(0)$ を満たすものが存在する.

距離空間においては, 同様に閉集合を分離することができる. 共通部分のない閉集合 F, F' に対して $\bar{d}(x,F)+\bar{d}(x,F')$ は常に正の値をとるから, 関数

$$f(x) \ = \ \frac{\bar{d}(x, F)}{\bar{d}(x, F)+\bar{d}(x, F')}$$

は任意の x に対して意味をもち, しかも $\bar{d}$ の連続性よりまた連続となる. この f について $O = \{x \,;\, f(x) < 1/3\}$, $O' = \{x \,;\, f(x) > 2/3\}$ を考えれば, これらは $F \subset O$, $F' \subset O'$ なる開集合であり, かつ $O \cap O' = \emptyset$ を満たす (図 3.3).

一般に位相空間 X において, 任意の交わらない閉集合 F, F' に対して $F \subset O$, $F' \subset O'$ かつ $O \cap O' = \emptyset$ なる開集合 O, O' が存在するとき, X は**ティーツェの第**

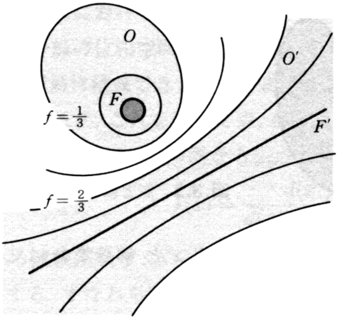


図 3.3　閉集合の分離

一公理あるいは**第四分離公理 $\mathbf{T_4}$** を満足するという．この空間がさらにハウスドルフであるとき**正規**と呼ぶ．以上をまとめると

【定理 3.3】　距離空間は正規空間である．

■ 例 3.1 ■　カントール集合 C の平行移動　(参照 例 1.51, p.48)

カントール集合 C を a だけ平行移動した $C+a=\{x+a;\ x\in C\}$ は，$-1\leq a\leq 1$ のとき必ずもとの C と交わる．これを点と部分集合との距離を応用して証明しよう．ただしコンパクト空間の章で証明する連続関数に関する最大値の定理 (p.132) を仮定する．二つの閉集合 $C, C+a$ が交わらないとすれば，関数 $\bar{d}(\cdot, C+a)$ は C 上正の値をとるが，C は有界閉集合であったから最小値が存在する．この最小値を δ とおく．対称性から δ は関数 $d(\cdot, C)$ の $C+a$ 上の最小値でもある．さて C は閉集合の減少列 $C_0\supset C_1\supset\cdots\supset C_n\supset\cdots$ の共通部分であるが，C_n は C_{n-1} の各部分区間から長さ $1/3^n$ の開区間を除いた集合である．この開区間の両端は最後まで除かれず $C=\bigcap C_n$ に属しているから，n を $1/3^n<\delta$ を満たすようにとれば，この開区間内には $C+a$ の元は存在しない (図 3.4)．すなわち $C_{n-1}\cap C+a=\emptyset$ であり，$C+a=\bigcap C_n+a$ に同じ議論を用いることによって $C_{n-1}\cap C_{n-1}+a=\emptyset$ が従う．そうすると今度は C_{n-1} が C_{n-2} の各部分区間から長さ $1/3^{n-1}$ の開区間を除いて得られること，および $C_{n-1}+a$ の各区間の長さが $1/3^{n-1}$ であることから，$C_{n-2}\cap C_{n-1}+a=\emptyset$，また $C_{n-1}+a$ と C_{n-2} に

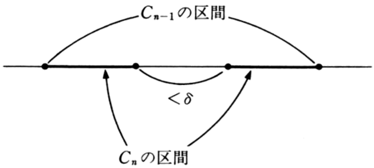


図 3.4

同じ議論を用いれば $C_{n-2} \cap C_{n-2}+a=\emptyset$ が得られる．これを繰り返せば，結局 $C_0 \cap C_0+a=[0,1]\cap[a,1+a]=\emptyset$ となるが，これが求める結論であった． □

3.1.2* 位相空間における分離公理

この項ではいくつかの分離公理と，その相互関係について述べる．まず異なる二点に関する分離条件を挙げる．位相空間 X に対する次の条件を**第一分離公理**あるいは**フレシェの公理**という (図 3.5).

(T_1) 任意の $x\in X$ および x と異なる $y\in X$ に対し，$x\in U$ かつ $y\notin U$ なる開集合 U が存在する．

この公理を満たす位相空間を**T_1-空間**あるいは**フレシェ空間**と呼ぶ．以下の分離公理についても同様である．

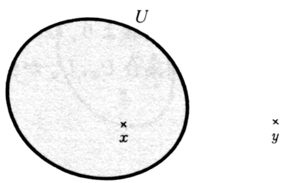


図 3.5 第一分離公理

【命題 3.4】 第一分離公理 T_1 は，空間の一点よりなる部分集合 $\{x\}$ が常に閉集合となることと同値である．

証明 空間 X において一点よりなる集合が常に閉集合であれば，条件 (T_1) を満たす開集合 U として $U=X\setminus\{y\}$ をとればよい．逆に条件 (T_1) で保証される開集合を U_y と書けば，一点よりなる集合 $\{x\}$ の補集合は $X\setminus\{x\}=\bigcup_{y\neq x}U_y$ より開集合である． ■

フレシェ: René Maurice Fréchet, 1878-1973.

次の条件を**第二分離公理**あるいは**ハウスドルフの分離公理**，これを満たす空間を**ハウスドルフ**という (p.106).

(T$_2$) 任意の異なる二点 $x \neq y$ に対し, $x \in U_x$, $y \in U_y$ かつ $U_x \cap U_y = \emptyset$ なる開集合 U_x, U_y が存在する.

定義から明らかなように第二分離公理は第一分離公理よりも強い.

■ **例 3.2** ■ **ザリスキ位相**　(参照 例 2.6, p.68)

$\boldsymbol{C}^n$ にザリスキ位相を入れた空間は第一分離公理を満たす. 各 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対し, 超平面 $z_i = \alpha_i$, $i = 1, \cdots, n$ がザリスキ位相に関して閉集合であることから, 一点 $\{\alpha\}$ も閉集合となる. しかしこの空間はハウスドルフではない. 空でない任意の二つの開集合が共通部分をもつからである. □

【命題 3.5】 空間 X がハウスドルフであるための必要十分条件は, 直積空間 $X \times X$ において対角線集合 $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ が閉集合となること.

証明　条件 $U \cap V = \emptyset$ が $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ と同値であることに注意する. 空間 X がハウスドルフであれば, $(x, y) \notin \Delta$ に対して $(x, y) \in U_x \times U_y$ かつ $U_x \times U_y \cap \Delta = \emptyset$ なる開集合 U_x, U_y が存在するから Δ の補集合 Δ^c は開集合である (図 3.6). 逆に Δ^c が開集合であれば, 積空間 $X \times X$ の位相の定義より, $(x, y) \notin \Delta$ に対して $(x, y) \in U_x \times U_y$ および $U_x \times U_y \cap \Delta = \emptyset$ を満たす開集合 U_x, U_y が存在する.

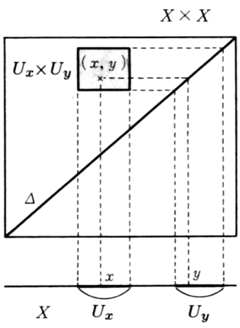


図 3.6 ■

■ **例 3.3** ■ **位相群における分離公理** (参照 例 2.12, p.77)
G を位相群, $\varphi : G\times G\to G$ を $\varphi(x,y)=x^{-1}y$ で定義される連続写像とする. このとき対角線集合 Δ は φ による単位元 $e\in G$ の逆像と一致する. したがって単位元 e のみよりなる集合 $\{e\}$ が閉集合であれば G はハウスドルフとなる. 特に第一分離公理を満たす位相群は第二分離公理をも満たす. □

一般の位相空間においても点列を考えることは可能であるが (p.65), 残念ながら, 収束点列であってもその極限は必ずしも一意には定まらない. 例えば $\boldsymbol{C}$ にザリスキ位相を入れ, この空間の点列 $\{p_n\}$ を $p_n=n$ で定義する. そうすると $\{p_n\}$ はすべての $x\in\boldsymbol{C}$ に収束する. 任意の $x\in\boldsymbol{C}$ とこれを含む任意の開集合 $x\in U$ に対し, U の補集合 U^c が有限集合であることから, 十分大きい n について $p_n\in U$ が成立するからである. これに反して, 扱う空間にハウスドルフ性を仮定すれば, 点列の極限は一意に定まる. ハウスドルフ空間 X の点列 $\{p_n\}$ が異なる二点 $x,y\in X$ に収束したと仮定しよう (図 3.7). 二点 x, y を分離する開集合 U_x, U_y をとれば, $p_n\to x$ より十分大きい n に対して $p_n\in U_x$. 同様に十分大きい n に対して $p_n\in U_y$ が成立するが, これは条件 $U_x\cap U_y=\emptyset$ に矛盾する.

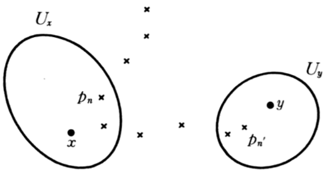


図 3.7

【命題 3.6】 ハウスドルフ空間の部分空間, 直積空間は再びハウスドルフとなる.

証明 X をハウスドルフ空間, A をその部分空間とする. A の異なる二点 x, y に対して, X がハウスドルフであることから, これらを分離する開集合 $U_x, U_y\subset X$ が存在するが, このとき $U_x\cap A$, $U_y\cap A$ は x, y を分離する A の開集合となる. 次に X, Y をハウスドルフ空間とする. (x,y), (x',y') を直積空間 $X\times Y$ の異なる二点とするとき, $x\neq x'$ あるいは $y\neq y'$ のいずれかが成り立つ. いま $x\neq x'$ とすれば, X のハウスドルフ性より, 開集合 U, U' であって $x\in U$, $x'\in U'$ かつ

$U \cap U' = \emptyset$ なるものが存在するが, このとき $U \times Y$ および $U' \times Y$ は二点 (x, y), (x', y') を分離する開集合となる. 無限直積の場合にも証明は同じである. ■

同様に第一分離公理も部分空間および直積空間に遺伝することが示される(章末問題5, p.121). しかし商空間については, 分離公理は必ずしも遺伝しない.

■ **例 3.4** ■ **部分集合を一点に縮めた空間** (参照 2.3.3 項 a), p.89)
距離空間 X においてその部分集合 A を一点に縮めた空間 X/A がハウスドルフとなるのは A が閉集合であるとき, そのときに限る. A が閉集合であるとき, 距離空間の正規性から, 任意の $x \in X \setminus A$ と A を分離する開集合が存在する. また $x \neq y$ を A に属さない異なる二点とするとき, X のハウスドルフ性から, x, y を分離する開集合 $x \in U_x$, $y \in U_y$ が存在する. ここで $U_x \setminus A$, $U_y \setminus A$ を考えれば, これらはそれぞれ x, y を含み, また A とは交わらないから, 商空間 X/A においても x と y とを分離する開集合である. 一方 A が閉集合でない場合, A の閉包 $\overline{A}$ と A との差集合から x をとれば, x を含む任意の開集合は A と共通部分をもつ(図 3.8). したがって商空間 X/A は第一分離公理すら満足しない.

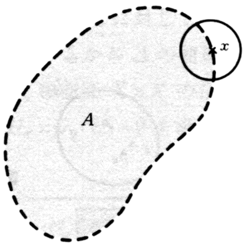


図 3.8 □

次に点と閉部分集合との分離条件を述べる. 位相空間 X に対する**第三分離公理**あるいは**ヴィエトリスの分離公理**は次の形で与えられる(図 3.9).

(T_3) X の点 x および閉部分集合 F が $x \notin F$ を満たすとき, $x \in U_x$, $F \subset U_F$ かつ $U_x \cap U_F = \emptyset$ なる開集合 U_x, U_F が存在する.

第三分離公理はつねに第二分離公理より強いわけではない. 一般の位相空間に

ヴィエトリス: Loepold Vietoris, 1891-.

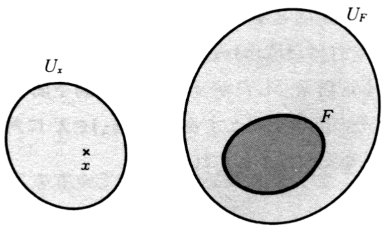


図 3.9 第三分離公理

おいては, 一点よりなる集合 $\{x\}$ が必ずしも閉集合ではないからである. この条件を追加した空間, すなわち第三分離公理と第一分離公理をともに満たす位相空間を**正則**と呼ぶ. 正則空間はハウスドルフ性をもつ. 文献によっては, 一点と閉集合を分離する開集合が存在するような空間を正則と呼び, 正則性と第一分離公理をあわせた条件を第三分離公理と呼ぶ場合もあるので注意が必要である. 例えば [2] はこの立場をとる. 以下の完全正則性と $T_{3\frac{1}{2}}$, 正規性と T_4 についても同様である.

【命題 3.7】 第三分離公理 T_3 は, 空間の各点が閉集合よりなる基本近傍系をもつことと同値である.

証明 空間 X の点 x が閉集合よりなる基本近傍系をもつとする. 閉集合 F が $x \notin F$ を満たせば, 補集合 F^c は x の近傍であるから $N \cap F = \emptyset$ なる x の閉近傍 N が存在する. N は x の近傍であるから $x \in \mathrm{Int}N$ で, また N が閉集合であるから補集合 N^c は F を含む開集合. よって条件 (T_3) を満たす開集合として $\mathrm{Int}N$, N^c をとることができる. 逆に X に条件 (T_3) を仮定しよう. このとき各 $x \in X$ および x を含む開集合 O に対し, x と $F = O^c$ に関して条件 (T_3) を満たす開集合 U_x, U_F をとる. ここで $V = (U_F)^c$ は閉集合で, かつ U_x を部分集合として含むから x の近傍である. X を含む任意の開集合 O に対して, その部分集合たる x の閉近傍が存在するから, x は閉近傍よりなる基本近傍系をもつ. ■

【系 3.8】 正則空間の部分空間および直積空間は再び正則となる.

証明　X を正則空間, A をその部分空間とする. 各 $x \in A$ に対し, 閉近傍よりなる X での基本近傍系を $\mathfrak{U}^*(x)$ とすれば, $\mathfrak{U}^*_A(x)=\{N\cap A;\ N\in\mathfrak{U}^*(x)\}$ は x の, A における相対閉集合からなる基本近傍系. したがって A も正則空間である. 次に X_λ を正則空間, $X=\prod X_\lambda$ をその直積空間とする. $x=(x_\lambda)\in X$ に対し, 閉近傍よりなる $x_\lambda \in X_\lambda$ の基本近傍系を $\mathfrak{U}^*_\lambda(x_\lambda)$ とすれば

$$\mathfrak{U}^*(x)=\left\{\left(\prod_{\lambda\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_k} X_\lambda\right)\times N_{\lambda_1}\times\cdots\times N_{\lambda_k};\ N_{\lambda_i}\in\mathfrak{U}^*_{\lambda_i}(x_{\lambda_i}), i=1,\cdots,k\right\}$$

は閉集合よりなる x の基本近傍系である. したがって X も正則空間である. ■

点と閉部分集合との開集合による分離条件 (T_3) を, 連続関数による分離に置き換えた次の条件を $\mathbf{T}_{\mathbf{3\frac{1}{2}}}$ あるいは**チコノフの分離公理**という.

$(\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}})$　任意の一点 $x\in X$ とこれを含まない閉部分集合 $F\subset X$ に対し, これらを分離する連続関数, すなわち $f: X\to \boldsymbol{R}$ であって $f(x)=0$ および任意の $y\in F$ に対して $f(y)=1$ を満たすものが存在する.

第一分離公理とこの $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満たす空間を**完全正則**と呼ぶ. $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ は T_3 よりも強い. したがって完全正則空間は正則である. また $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満たす空間の部分空間および直積空間は再びこの分離公理を満たす (章末問題 8, p.121).

最後に閉部分集合に関する分離条件を述べる. **第四分離公理**あるいは**ティーツェの第一公理**は次の条件をさすのであった (p.107).

(T_4)　任意の交わらない閉部分集合 F_1, F_2 に対して $F_1\subset U_1$, $F_2\subset U_2$, $U_1\cap U_2=\emptyset$ を満たす開集合 U_1, U_2 が存在する.

第一分離公理および第四分離公理を満たす空間を**正規**と呼ぶ. 第四分離公理のもとでは, 第一分離公理から第二分離公理が導かれるから, これは前項での定義と同値である (p.108). 正規空間は完全正則であるが, これは次節で述べるウリゾーンの補題 (p.116) による. 一方で第四分離公理は $\mathrm{T}_1\sim\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ と異なり, 部分空間および直積空間には遺伝しない. また距離空間は正規であったが, 逆は正しくない. これらの反例に関しては [1] あるいは [2] を参照されたい.

チコノフ: Andreĭ Nikolaevič Tihonov, 1906-.

ウリゾーン: Pavel Samuilovič Urysohn, 1898-1924.

<まとめ> 前半では距離空間における点と部分集合との距離の定義とその応用, 後半では位相空間の点および閉部分集合に関するいくつかの分離条件を述べた.

[例題] X を完全正則な位相空間, $C(X)$ を X 上の実数値連続関数の全体からなる集合とする. このとき X の位相は $C(X)$ による弱位相, すなわち各 $f \in C(X)$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続とする位相のうちで最も弱いものと等しい.

(解) もとの位相を $\mathfrak{O}$, 弱位相を $\mathfrak{O}_w$ で表す. $C(X)$ の各元は定義より $\mathfrak{O}$ に関して連続であるから, $\mathfrak{O}$ は $\mathfrak{O}_w$ より強い. したがって $\mathfrak{O}_w$ が $\mathfrak{O}$ より強いことをいえばよいが, そのためには $\mathfrak{O}$ に関する閉集合が $\mathfrak{O}_w$ に関しても閉であることを示せば十分である. 部分集合 F を $\mathfrak{O}$ に関する閉集合とする. 任意の $x \in X \setminus F$ に対して, 完全正則性の仮定から, 連続関数 $h_x \in C(X)$ であって $x \in h_x^{-1}(0)$, $F \subset h_x^{-1}(1)$ を満たすものが存在する. このとき F は $H = \bigcap_{x \notin F} f_x^{-1}(1)$ に含まれるが, 各 $x \notin F$ に対して $h_x(x) = 0$ であるから $F = H$ が成り立つ. 一方で $h_x^{-1}(1)$ は $h_x \in C(X)$ による $\boldsymbol{R}$ の閉集合 $\{1\}$ の逆像であるから $\mathfrak{O}_w$ に関する閉集合であり, その共通部分である H すなわち F もまた $\mathfrak{O}_w$ に関する閉集合である. したがって弱位相 $\mathfrak{O}_w$ はもとの位相 $\mathfrak{O}$ よりも強い. ■

3.2* 距離化定理

この節では位相空間上の連続関数を扱う. 距離空間においては, 交わらない閉部分集合を分離する連続関数が存在し, これを用いて閉部分集合を分離する開集合を構成した. 一般の位相空間においては, 開集合による閉部分集合の分離は公理として与えられるが, 空間が正規であれば, これから逆に交わらない閉部分集合を分離する連続関数を構成することができる. その応用として, 正規空間においてはこれを表現するに足りるだけ十分な数の連続関数が存在すること, さらに第二可算公理を仮定すれば位相を実現する距離関数が存在することを証明する.

3.2.1 連続関数の構成

正規空間において, 交わらない閉集合を分離する連続関数を構成する.

【定理 3.9（ウリゾーンの補題）】　X を正規空間, A, B を X の交わらない閉部分集合とする. このとき連続関数 $f:X\to[0,1]$ であって $f(x)=0,\ x\in A$, $f(x)=1,\ x\in B$ を満たすものが存在する.

証明　基本的アイデアは, 空間を等高線で埋め尽くすことによって, 逆に高さの関数を定義しようというものである. 開集合 O_1 を $O_1=X\backslash B$ で定義すれば

$$A\subset O_1\ .$$

閉集合 A と $B=X\backslash O_1$ とが共通部分をもたないことから, 正規性よりこれらを分離する開集合 O_A, O_B が存在する. すなわち $A\subset O_A$, $B\subset O_B$ かつ $O_A\cap O_B=\emptyset$. このとき O_A の閉包 $\overline{O_A}$ は, 補集合 $X\backslash O_B$ に含まれているから B とは交わらない. したがって O_A を改めて O_0 と書けば

$$A\subset O_0\subset\overline{O_0}\subset O_1$$

なる開集合 O_0 の存在が示された. この議論を次に $\overline{O_0}\subset O_1$ に対して用いれば

$$O_0\subset\overline{O_0}\subset O_{1/2}\subset\overline{O_{1/2}}\subset O_1$$

なる開集合 $O_{1/2}$ が存在する. 再び $\overline{O_0}\subset O_{1/2}$, $\overline{O_{1/2}}\subset O_1$ に用いれば

$$O_0\subset\overline{O_0}\subset O_{1/4}\subset\overline{O_{1/4}}\subset O_{1/2}\subset\overline{O_{1/2}}\subset O_{3/4}\subset\overline{O_{3/4}}\subset O_1$$

なる開集合 $O_{1/4}$, $O_{3/4}$ が存在する. これを繰り返して 0 と 1 の間の 2 進分数 $r=k/2^m$, $k=0,1,\cdots,2^m$, $m=0,1,\cdots$ に開集合 O_r を対応させ, $r<r'$ ならば $O_r\subset\overline{O_r}\subset O_{r'}$ が成立するようにできる(図3.10). この開集合族を用いて

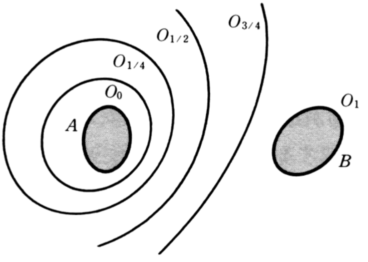


図 3.10

$f(x)=\inf\{r;\ x\in O_r\}$ と定義される関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ が題意を満たすことを証明しよう. ただし $x\in B=X\backslash O_1$ に対しては $f(x)=1$ とおく. $x\in A$ に対して

は $f(x)=0$, $x\in B$ に対しては $f(x)=1$ であるから, 問題は連続性にある. ここで条件 $f(x)<a$ は $x\in\bigcup_{r<a}O_r$ と同値であるから, 部分集合 $\{x;\ f(x)<a\}$ は開集合である. ただし $\bigcup$ は, $0\leq r<a$ を満たす 2 進分数 r についての和である. また条件 $f(x)>a$ は $x\notin\bigcap_{a<r}O_r$, すなわち $x\in\bigcup_{a<r}(X\setminus O_r)$ と同値である. ここで $a<r$ ならば $a<r'<r$ なる 2 進分数 r' が存在し, この r' に対して $X\setminus O_r\subset X\setminus\overline{O_{r'}}\subset X\setminus O_{r'}$ が成り立つから $\bigcup_{a<r}(X\setminus O_r)=\bigcup_{a<r'}(X\setminus\overline{O_{r'}})$. したがって部分集合 $\{x;\ f(x)>a\}$ も開集合であり, f は連続関数である. ■

正規空間においては一点からなる集合が閉集合であった. したがってウリゾーンの補題は正規空間が完全正則であることを導く.

正規空間においてはまた, 閉部分集合上定義された連続関数を全空間上の連続関数に拡張することができる. 証明には連続関数の一様収束極限が連続であることを用いるが, これについては完備距離空間の章で述べる (定理 6.12, p.204).

【定理 3.10 (ティーツェの拡張定理)】 X を正規空間, F を X の閉部分集合とする. このとき F から閉区間への任意の連続関数 $f:F\to[a,b]$ は, X 上の連続関数 $\bar{f}:X\to[a,b]$ に拡張する.

証明 X 上の連続関数よりなる級数であって, 和が F 上では f に収束するものを構成する. 値域の閉区間を $[-1,1]$ としても一般性は失わない. $0<\lambda<1/3$ なる λ を一つ決め, $F_-=\{x\in F;\ f(x)\leq-\lambda\}$, $F_+=\{x\in F;\ f(x)\geq\lambda\}$ とおく. F_+, F_- は F の, したがって X の閉部分集合であって共通部分をもたないから, ウリゾーンの補題によって, 連続関数 $g_0:X\to[-1,1]$ で, F_- 上値 -1 を, F_+ 上値 1 をとるものが存在する. この g_0 を用いて F 上の連続関数 f_1 を $f_1(x)=f(x)-\lambda g_0(x)$ で定義する. $\mu=1-\lambda$ とおけば, $x\in F_-$ のとき $-1\leq f(x)\leq-\lambda$, $g_0(x)=-1$ より $-\mu\leq f_1(x)\leq 0$, $x\in F_+$ のとき $\lambda\leq f(x)\leq 1$, $g_0(x)=1$ より $0\leq f_1(x)\leq\mu$, $x\notin F_-,F_+$ のとき $-\lambda<f(x)<\lambda$, $-1\leq g_0(x)\leq 1$ より $-\mu<f_1(x)<\mu$ が成立するから, この f_1 は F 上 $-\mu\leq f_1(x)\leq\mu$ を満たす (図 3.11). 次に F の部分集合を $F_{1-}=\{x\in F;\ f_1(x)\leq-\lambda\mu\}$, $F_{1+}=\{x\in F;\ f_1(x)\geq\lambda\mu\}$ で定めれば, F_{1-}, F_{1+} はまた交わらない閉集合であるから, 連続関数 $g_1:X\to[-1,1]$ で, F_{1-} 上値 -1 を, F_{1+} 上値 1 をとるものが存在する. 次に f_1 と g_1 を用いて F 上の連

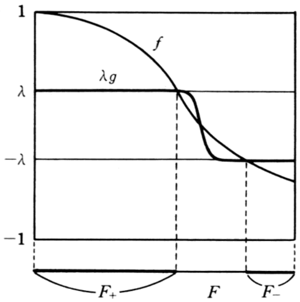


図 3.11

続関数 f_2 を $f_2(x)=f_1(x)-\mu\lambda g_1(x)$ で定義すれば, f_2 は $-\mu^2 \le f_2(x) \le \mu^2$ を満たす. これを繰り返すことによって F 上の連続関数の列 $f_n : F \to [-\mu^n, \mu^n]$ および X 上の連続関数の列 $g_n : X \to [-1,1]$ が得られる. ここで g_n よりなる級数 $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda\mu^n g_n(x)$ は収束する優級数 $\sum \lambda\mu^n$ をもつから X 上一様収束し, その和 $s(x)$ は X 上連続かつ $|s(x)| \le \sum \lambda\mu^n = 1$ を満たす (系 6.13, p.204). またもとの閉集合 F 上では $f_{k+1}(x) = f_k(x) - \mu^k g_k(x)$ であったから $f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu^k g_k(x) = f_n(x)$ であり, この f_n が $|f_n(x)| \le \mu^n$ を満たすことから $x \in F$ に対しては $f_n(x) \to 0$, したがって $s(x)=f(x)$ が成立する. すなわち F 上の関数 $f : F \to [-1,1]$ は連続関数 $s : X \to [-1,1]$ に拡張した. ■

3.2.2　距離化定理

前項で構成した連続関数を用いて, 完全正則空間を立方体 $[0,1]^\Lambda$ の部分空間として表現する. 正規空間は完全正則であるからやはり立方体に埋め込むことができるが, さらに第二可算公理を仮定すれば, 添数集合 Λ を可算にとることができる. このとき $[0,1]^\Lambda$ は距離空間の可算直積であるから距離空間の構造をもち, その部分空間と同相であるもとの空間も距離関数によって位相が与えられる.

【定理 3.11 (埋め込み定理)】　任意の完全正則空間は, 適当な添数集合 Λ をとれば, 立方体 $[0,1]^\Lambda$ の部分空間として実現可能である.

証明 X を完全正則空間とし, X から $[0,1]$ への連続関数の全体を添数集合 Λ を用いて $\{f_\lambda : X \to [0,1];\ \lambda \in \Lambda\}$ と表す. このとき $\varphi(x) = (f_\lambda(x))$ で定義される写像 $\varphi : X \to [0,1]^\Lambda$ が求める埋め込みを与える. 写像 φ の連続性は各 f_λ が連続であることから従う. 次に φ が単射であることをいう. x, y を X の異なる二点とする. 完全正則空間においては一点からなる集合は閉集合であるから, x とこれを含まない閉集合 $\{y\}$ を分離する連続関数 $f_\lambda : X \to [0,1]$ が存在する. したがって $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. 最後に X の任意の開集合に対し, その φ による像が部分空間 $\varphi(X)$ の開集合であることを示す. これは逆写像 $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ の連続性と同値であるから, 証明が完結する. O を X の開集合, x を O の元とする. このとき閉集合 $X \backslash O$ は x を含まないから, 連続関数 $f_{\lambda_0} : X \to [0,1]$ であって, $f_{\lambda_0}(x) = 0$ および任意の $y \notin O$ に対し $f_{\lambda_0}(y) = 1$ を満たすものが存在する (図 3.12). この添数 λ_0 について, $\varphi(O)$ は $\varphi(X) \cap \{z = (z_\lambda);\ z_{\lambda_0} < 1\}$ を含むが, これは $\varphi(x)$ を含む $\varphi(X)$ の開集合. よって $\varphi(O)$ は, それに含まれる任意の $\varphi(x)$ の $\varphi(X)$ における近傍であり, すなわち $\varphi(X)$ の開集合である.

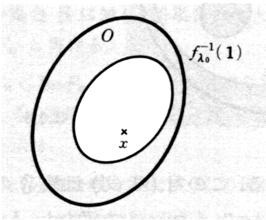


図 3.12 ■

【定理 3.12 (距離化定理)】 第二可算公理を満たす正規空間は距離化可能. すなわちこの位相を与える距離関数を定義することができる.

証明 仮定を満たす位相空間から可算直積空間 $[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ への埋め込みを構成する. そうすれば $[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ が距離空間であったから, 埋め込みの像は部分距離空間であり, もとの空間の位相も距離関数によって与えられることがわかる.

X を第二可算公理を満たす正規空間, $\mathfrak{O}^*$ を X の開集合系の可算基とする. $\mathfrak{O}^*$ の元の対 (O, O') であって $\overline{O} \subset O'$ を満たすものの全体を $\mathfrak{F}$ とおく. $\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{O}^* \times \mathfrak{O}^*$ の部分集合で可算であるから, $\mathfrak{F} = \{(O_n, O'_n)\}_{n=1,2,\cdots}$ と書くことができ

る．その各元 (O_n, O'_n) に対して，ウリゾーンの補題より，$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in O_n \\ 1, & x \notin O'_n \end{cases}$
なる連続関数 $f_n : X \to [0,1]$ が存在する．これを用いて写像 $\varphi : X \to [0,1]^{\boldsymbol{N}}$ を $\varphi(x) = (f_n(x))$ によって定義する．各 f_n が連続であるから φ も連続．次に φ が単射であることを示す．x, y を X の異なる二点とする．正規空間においては一点は閉集合であるから，$X \backslash \{y\}$ は開集合．この開集合は x を含むが，$\mathfrak{O}^*$ が開集合系の基であったから，その元の和として表される．したがって $O' \in \mathfrak{O}^*$ で $x \in O'$，$y \neq O'$ なるものが存在する．今度は $\{x\}$ および O' の補集合が閉集合であることを用いれば，X の正規性より $\{x\} \subset O_1$，$X \backslash O' \subset O_2$，$O_1 \cap O_2 = \emptyset$ を満たす開集合 O_1, O_2 が存在するが (図 3.13)，この O_1 に先と同じ議論を用いれば $x \in O$，

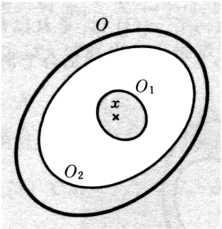


図 3.13

$\overline{O} \subset O'$ なる $\mathfrak{O}^*$ の元 O がとれる．この対 (O, O') は族 $\mathfrak{F}$ の元であるから，対応する関数 $f_n : X \to [0,1]$ は $f_n(x) = 0$，$f_n(y) = 1$ を満たし，したがって $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ である．最後に φ が開写像であることを示せば，φ が埋め込みであることがわかる．O を X の開集合，x を O の元とする．φ の単射性を示したと同様の議論によって，$\mathfrak{F}$ の元 (O_m, O'_m) であって $x \in O_m$ および $O'_m \subset O$ を満たすものが存在する．このとき φ の第 m 座標 f_m は x で値 0 を，O 以外で値 1 をとる．よって $\mathrm{pr}_m : [0,1]^{\boldsymbol{N}} \to [0,1]$ を第 m 成分への射影とするとき，O の φ による像 $\varphi(O)$ は $\varphi(x) \in \varphi(X) \cap \mathrm{pr}_m^{-1}([0,1))$ を含むが，これは相対位相に関する $\varphi(X)$ の開集合であるから，φ は開写像である．以上によって，第二可算公理を満たす正規空間の位相が距離関数によって導かれることが証明された．　■

これが距離化定理であるが, 実際には第二可算公理のもとで正則性から正規性が導かれるから, 第二可算公理を満たす正則空間は距離化可能である. 詳しくは [1] あるいは [2] を参照されたい.

<まとめ>　ウリゾーンの補題, ティーチェの拡張定理, 埋め込み定理および距離化定理を述べた.

章　末　問　題

1.　X を距離空間, d をその距離とする. X の部分集合 A, B に対してそれらの**距離**を $\bar{d}(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$ で定義する. このとき $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ ならば $\bar{d}(A,B) = 0$ が成り立つが, 逆は必ずしも正しくないことを示せ.

2.　距離空間の開部分集合と閉部分集合について以下を示せ.

(1)　任意の閉部分集合 A に対し, 開集合の減少列 $O_1 \supset O_2 \supset \cdots \supset O_n \supset \cdots$ が存在して $A = \bigcap O_n$ と書ける.

(2)　任意の開部分集合 B に対し, 閉集合の増大列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$ が存在して $B = \bigcup F_n$ と書ける.

3.　距離空間 X が $F_n \subset \mathrm{Int} F_{n+1}$ を満たす閉部分集合の族 $\{F_n\}_{n=0,1,\cdots}$ の和集合として表されているとき, 連続関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ であって $F_n = f^{-1}[0,n]$ を満足するものが存在することを示せ.

4.　ザリスキ位相は第一分離公理を満たす $\boldsymbol{C}$ の位相のなかで最も弱いことを示せ.

5.　第一分離公理を満たす空間の部分空間および直積空間は再び第一分離公理を満たすことを証明せよ.

6.　複素数 $\alpha \neq 0$ に対し, 複素数全体から 0 を除いた空間 $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ の同値関係 $z \sim_\alpha z'$ を整数 n が存在して $z = \alpha^n z$ が成り立つこととして定義する. このとき商空間 $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}/\sim_\alpha$ がハウスドルフ性をもつための α に関する条件を求めよ.

7.　実数空間 $\boldsymbol{R}$ は加法に関して位相群となる. その商位相群, すなわち部分群 A による商群 $\boldsymbol{R}/A$ に商位相を与えた位相群でハウスドルフ空間であるものを決定せよ.

8.　チコノフの分離公理 $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満たす空間の部分空間および直積空間は再びチコノフの分離公理を満たすことを証明せよ.

4

コンパクト空間

位相空間におけるコンパクト性の概念は，ハウスドルフ性と並んで最も重要なものである．解析学における最大値の定理は，ユークリッド空間の有界閉集合上定義された連続関数が常に最大値をとることを主張するが，これは定義域がコンパクト性を満たすことによるものであり，この結果はコンパクト空間上の連続関数に対して拡張される．ほかにもコンパクト距離空間においては任意の数列が収束部分列を含むなど，この性質は各種の議論を展開する際には非常に有効な作業仮説となる．最初の 4.1 節でコンパクト性の定義，距離空間における点列による特徴づけ，最大値の定理，ハウスドルフ空間における応用など基本的結果を述べる．4.2, 4.3 節以降は，コンパクト性の一般化である局所コンパクト性，パラコンパクト性およびそれらの分離公理との関連，また与えられた空間のコンパクト化について触れるが，ここでは分離公理の章の知識が必要となる．最初に通読する際には飛ばしてもよい．上にも述べたようにコンパクト空間の典型例はユークリッド空間の有界閉集合であるから，これを思い浮かべつつ読み進めていただきたい．

4.1　コンパクト性

距離空間においてはコンパクト性は点列コンパクト性と同値であり，後者の方が直感的には受け入れやすいが，ここでは被覆による定義から始める．親しむまでに時間がかかるけれども，使いこなせるようになれば大変有用な定義である．

4.1.1 コンパクト空間

X を位相空間とする. X の部分集合の族 $\mathfrak{E}=\{E_\lambda\}_\lambda$ が X の**被覆**であるとは $X=\bigcup_\lambda E_\lambda$ が成立するときをいう. 同様に X の部分集合 A に対して $\mathfrak{E}$ が A の**被覆**であるとは $A\subset\bigcup_\lambda E_\lambda$ が成立すること(図 4.1). 開部分集合よりなる被覆

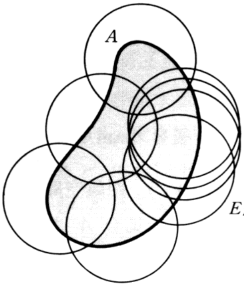


図 4.1 被覆

を**開被覆**, 属する集合が有限個であるような被覆を**有限被覆**と呼ぶ. また $\mathfrak{E}$ の部分集合 $\mathfrak{E}'$ が再び X あるいは A の被覆となっているとき, これを $\mathfrak{E}$ の**部分被覆**という. 例えば X を距離空間, ε を正の数とするとき, X の ε-開球の全体 $\{U(x;\varepsilon);\ x\in X\}$ は X の開被覆である. 以上の準備のもとで, 位相空間 X が**コンパクト**とは, X の任意の開被覆 $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_\lambda$ が有限部分被覆をもつこと, すなわち $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ が存在して $X=\bigcup_{i=1,\cdots,n} V_{\lambda_i}$ となることをいう. 同じく X の部分集合 A が**コンパクト**とは, A の任意の開被覆が有限部分被覆をもつことである. これは A を部分位相空間と見なしたときのコンパクト性の定義と一致する. また X の部分集合 A が**相対コンパクト**とは, A の閉包 $\overline{A}$ がコンパクトであるときをいう. 後に述べるように (4.1.4項, p.138), コンパクト性が真にその威力を発揮するのはハウスドルフ空間においてである. このことからブルバキ [3] はハウスドルフかつコンパクトなる空間を単にコンパクト, ここでいうコンパクト空間を**準コンパクト**と呼ぶ. この定義を採用する文献もあるので注意されたい.

空間 X がコンパクトであるか否かは当然その位相によって定まっている. すなわち空間 X と Y とが同相であれば, X がコンパクトであることと Y がコンパクトであることは同値. このような性質を**位相不変**であるという. 第一可算性, 第二可算性, また各種の分離公理なども位相不変な性質である. コンパクト性,

また次の章で述べる連結性は位相不変な性質の中でも特に重要な概念である.

■ **例 4.1** ■ **密着空間, 離散空間**　(参照 例 2.1, p.57)
有限個の点よりなる空間や密着空間には開集合が有限個しか存在しないから, 定義によってこれらの空間はコンパクトである. 逆に離散空間においては一点よりなる集合が開集合であるので, このような集合による被覆を考えれば, 離散空間がコンパクトとなるのはそれが有限集合であるときに限ることがわかる.　□

■ **例 4.2** ■ **コンパクト距離空間の有界性**
距離空間 X の部分集合 A に対し, その**直径**を $\mathrm{diam}A = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$ で定義し, この値が有限であるとき A は**有界**であるという. 距離空間自身の直径, 有界性も同様に定義される. 距離空間のコンパクト部分集合 A は有界である. これを示すために一点 $p\in A$ を決め, p を中心とする開球の族 $\{U(p;r)\}_{r>0}$ を考える (図 4.2). これは A の開被覆をなすから, コンパクト性より有限部分被覆が存在する. したがって適当な r に対して $A\subset U(p;r)$ となるが, このとき任意の $x,y\in A$ に対して $d(x,y)\leq d(x,p)+d(y,p)<2r$ が成立するから A は有界である.

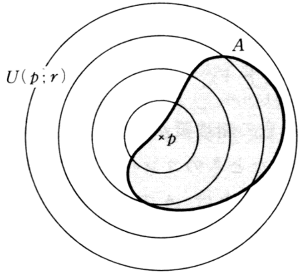


図 4.2　□

最も重要でかつ基本的なコンパクト空間は実数空間の閉区間であろう. 閉区間がコンパクトであることの証明は, 次に述べる直接的方法と, 点列コンパクト性を利用する方法とがある. 後者については次の 4.1.2 項で述べる (p.128).

【**定理 4.1**】 実数空間の閉区間はコンパクトである.

証明 閉区間を $I=[a,b]$ とし, $\mathfrak{V}$ を I の開被覆とする. 区間 I の点 t であって, 部分区間 $[a,t]$ に対して $\mathfrak{V}$ の有限部分被覆が存在するようなものの全体を A とおく. 一点からなる集合 $\{a\}$ は適当な $\mathfrak{V}$ の元で覆われるから $a\in A$ であり, A は空集合ではない. また A は $[a,b]$ の部分集合であるから有界で, したがって上限 $s=\sup A$ が存在する. まず $s\in A$ を示す. $\mathfrak{V}$ が I の被覆で, s は I の点であるから, s を含む $\mathfrak{V}$ の元 V が存在する. V は開集合であるから適当な $\varepsilon>0$ をとれば 区間 $[s-\varepsilon,s]$ は V に含まれる. ここで $s=\sup A$ より部分区間 $[a,s-\varepsilon]$ を覆う $\mathfrak{V}$ の有限部分被覆が存在するが, これに V をつけ加えれば $[a,s]$ を覆う (図 4.3). よって $s\in A$ である. 次に $s=b$ を示す. もし $s<b$ であれば, 同じ V に対して $[s,s+\varepsilon']\subset V$ なる ε', $0<\varepsilon'<b-s$ が存在し, 同じく閉区間の上端 $s+\varepsilon'$ も A に属する. これは s が A の上限であることに反する. したがって $s=b$, すなわち閉区間 $[a,b]$ を覆う有限部分被覆が存在することが示された.

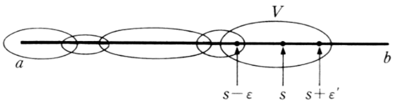


図 4.3 ■

開被覆によってコンパクト性を定義したが, これを双対性を用いて書き換える. 位相空間 X の部分集合の族 $\mathfrak{A}$ が**有限交叉性**をもつとは, 任意の有限個の $A_1,\cdots,A_n\in\mathfrak{A}$ に対して, 共通部分 $A_1\cap\cdots\cap A_n$ が空でないことをいう.

【命題 4.2】 位相空間 X がコンパクトであるのは, 有限交叉性をもつような X の任意の閉部分集合族 $\mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{A}$ に属する部分集合すべての共通部分が空でない, すなわち $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A\neq\emptyset$ であるとき, そのときに限る.

証明 X の開集合族 $\mathfrak{V}$ に対して, その各元の補集合よりなる族 $\mathfrak{A}=\{A=V^c;\, V\in\mathfrak{V}\}$ は閉集合族である. このとき $\mathfrak{V}$ が X の被覆であることと共通部分 $\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A$ が空であることは同値で, また $\mathfrak{V}$ が有限部分被覆をもつことと 適当な有限部分集合 $\{A_1,\cdots,A_n\}\subset\mathfrak{A}$ について共通部分 $A_1\cap\cdots\cap A_n$ が空であることは同値である. したがってもとの定義の対偶をとれば, この命題が得られる. ■

4.1.2　点列コンパクト性

距離空間においてはコンパクト性を点列の言葉で言い換えることができる. 一般に位相空間 X が**点列コンパクト**であるとは, X の任意の点列が収束部分列をもつときをいう.

【定理 4.3】 距離空間に対してはコンパクト性と点列コンパクト性とは同値.

証明　コンパクト距離空間 X の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が収束部分列をもつことを示す. この点列に対して $A_k=\{x_k, x_{k+1}, \cdots\}$ とおき, その閉包 $\overline{A_k}$ 全体のなす族 $\mathfrak{A}=\{\overline{A_k}\}$ を考える. $\mathfrak{A}$ の各元 $\overline{A_k}$ は空でない閉集合で, 単調減少 $\overline{A_1}\supset\overline{A_2}\supset\cdots\supset\overline{A_k}\supset\cdots$ であるから有限交叉性をもつ. したがって X のコンパクト性より $\bigcap_k\overline{A_k}$ は空ではない. 共通部分 $\bigcap_k\overline{A_k}$ から一点 x を選べば, x は $\overline{A_k}$ に属すから $d(x_{n_k}, x)\leq 1/k$ なる $x_{n_k}\in A_k$ が存在する (図 4.4). このとき $n_k\geq k$ より数列 $\{n_k\}$ は異なる自然数を無限個含むから, $\{x_{n_k}\}$ は $\{x_n\}$ の部分列であり, また明らかに x に収束する. よって点列 $\{x_n\}$ は収束部分列をもつ.

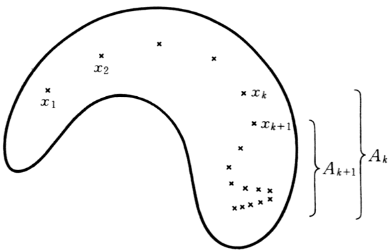


図 4.4

次に距離空間 X が点列コンパクトであると仮定し, X の任意の開被覆 $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_\lambda$ が有限部分被覆をもつことをいう. 最初に $\mathfrak{V}$ に対して $\varepsilon>0$ が存在して, 任意の $x\in X$ の ε-近傍 $U(x;\varepsilon)$ が $\mathfrak{V}$ のどれかの元 V_λ に含まれることを示す. このような ε を開被覆 $\mathfrak{V}$ の**ルベーグ数**と呼ぶ. ルベーグ数が存在しないならば, 各 k に対し, その $1/k$-近傍がどの $\mathfrak{V}$ の元にも含まれないような点 $x_k\in X$ をとることができる. こうして得られた点列 $\{x_k\}$ は, X の点列コンパクト性より収束部

ルベーグ: Henri Lebesgue, 1875-1941.

分列 $\{x_{k'}\}$ をもつ. その極限を x_∞ とおくと, $\mathfrak{V}$ は X の被覆であるから適当な $V_\lambda \in \mathfrak{V}$ が x_∞ を含む. V_λ は開集合であるから, $\eta>0$ が存在して $U(x_\infty;\eta)\subset V_\lambda$. 十分大きい k' をとれば $1/k'<\eta/2$ と $d(x_{k'},x_\infty)<\eta/2$ とが同時に成り立つが, このとき $U(x_{k'};1/k')\subset U(x_\infty;\eta)\subset V_\lambda$ となって点列 $\{x_k\}$ のとり方に矛盾する. すなわちルベーグ数の存在が示された. さて開被覆 $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_\lambda$ が有限部分被覆をもたないとして矛盾を導こう. $\mathfrak{V}$ に対するルベーグ数を ε とし, これを用いて X の点列 $\{x_n\}$ を以下のように構成する. まず任意の $x_1\in X$ を選ぶ. このとき $U(x_1;\varepsilon)$ を含む $V_{\lambda_1}\in\mathfrak{V}$ が存在する. もし $X\setminus V_{\lambda_1}$ が空ならば X が V_{λ_1} だけで覆われるから $X\setminus V_{\lambda_1}\neq\emptyset$ であり, 点 $x_2\in X\setminus V_{\lambda_1}$ を選ぶことができる. 同様に $U(x_2;\varepsilon)$ を含む $V_{\lambda_2}\in\mathfrak{V}$ が存在するが, $X\setminus(V_{\lambda_1}\cup V_{\lambda_2})$ はやはり空でない. よって $x_3\in X\setminus(V_{\lambda_1}\cup V_{\lambda_2})$ を選ぶことができる (図 4.5). この操作を繰り返して得られた点列 $\{x_n\}$ は, $n>m$ に対して $x_n\notin U(x_m;\varepsilon)$, すなわち $d(x_n,x_m)\geq\varepsilon$ を満たすから収束部分列を含みえない. これは X が点列コンパクトであることに反し, 矛盾が生じた.

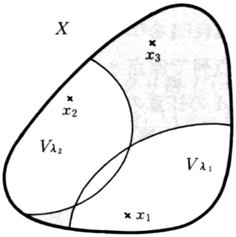


図 4.5 ■

この証明の中で, 点列コンパクトな距離空間の開被覆に対してルベーグ数の存在を示した. 証明では全空間の点列コンパクト性を仮定したが, 点列コンパクトな部分集合の開被覆に対しても同じ議論が成立する. 距離空間においては点列コンパクト性とコンパクト性は同値であるから, 結局次の結果が証明されている.

【定理 4.4 (ルベーグ数の存在)】 X を距離空間, A を X のコンパクト部分集合, $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_\lambda$ を A の開被覆とする. このとき $\varepsilon>0$ を選んで, 任意の $x\in A$ の ε-近傍 $U(x;\varepsilon)$ が $\mathfrak{V}$ のどれかの元 V_λ に含まれるようにできる.

距離空間においてコンパクト性が点列で判定できることの応用として, まず実数空間の閉区間がコンパクトであること (定理 4.1) の別証明を与え, 次にユークリッド空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件を述べる.

閉区間がコンパクトであることの再証明　閉区間 $[a,b]$ 上の数列 $\{x_n\}$ は有界であるから, ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理 (p.243) によって実数空間 $\boldsymbol{R}$ において収束する部分列 $\{x_{n'}\}$ を含む. 一方で極限操作が不等号 $\leq$ を保つことから $a \leq \lim x_{n'} \leq b$ であり, この極限はもとの閉区間 $[a,b]$ に属する. すなわち閉区間は点列コンパクトであり, したがってコンパクトでもある. ■

空でない開区間は, 端点に収束するような数列がその区間の中に極限をもたないため, 点列コンパクトではない. したがって開区間と閉区間とは同相ではない.

【定理 4.5】　ユークリッド空間の部分集合がコンパクトであるのは, それが有界閉集合であるとき, そのときに限る.

証明　ユークリッド空間の部分集合 A がコンパクト, したがって点列コンパクトであるとする. このとき A の点列で原点との距離が ∞ に発散するものは存在しえないから, A は有界. また A の任意の触点に対して, それに収束する A の点列が存在するから, 触点はすべて A に属する, すなわち A は閉集合である.

逆に A をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の有界な閉集合とする. このとき $A \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ なる閉区間 $[a_1, b_1]$, $\cdots$, $[a_n, b_n]$ が存在する. $\{x_k\}$ を A の点列とするとき, 閉区間 $[a_1, b_1]$ がコンパクトであったから, $\{x_k\}$ の部分列 $\{x_{k'}\}$ を選んで, 第一座標 $\{x_{k'1}\}$ が収束するようにできる. 同じく閉区間 $[a_2, b_2]$ がコンパクトであることから, この $\{x_{k'}\}$ に対して部分列 $\{x_{k''}\}$ を選んで, 第二座標 $\{x_{k''2}\}$ が収束するようにできる. $\{x_{k''}\}$ は $\{x_{k'}\}$ の部分列であるから, 第一座標 $\{x_{k''1}\}$ も収束している. これを第 n 座標まで繰り返せば, $\{x_k\}$ の部分列 $\{x_{k^{(n)}}\}$ で, $k^{(n)} \to \infty$ に対してそのすべての座標が収束するものが存在するが, これは $\{x_{k^{(n)}}\}$ 自身が収束することにほかならない. A は閉集合であったから, 極限は A に属し, したがって A の任意の点列は A 内に収束する部分列をもつ. ■

定理 4.5 は, ユークリッド空間の有界閉集合がコンパクトであるという命題を含んでいる. この命題を**ハイネ-ボレルの被覆定理**, またこれと同値な, ユークリッド空間の有界閉集合が点列コンパクトであるという命題を**ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理**と呼ぶ.

■ **例 4.3** ■ **二次曲線**
平面上の二次曲線, すなわち方程式 $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ で与えられる曲線は部分集合としては閉集合であるから, コンパクトとなるのは有界な場合である. その条件は判別式を用いて $b^2-ac<0$ と表される. 退化していない二次曲線のうち楕円はコンパクトであり, 放物線, 双曲線はコンパクトではない. □

■ **例 4.4** ■ **球面 S^n, 閉円板 D^n, トーラス T^n**
n 次元球面 S^n は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の有界閉集合であるからコンパクト. 同様に n 次元閉円板 $D^n=\{(x_1,\cdots,x_n);\ \sum x_i^2\le 1\}$ もコンパクトである. 一方で開円板 $\mathrm{Int}D^n=\{(x_1,\cdots,x_n);\ \sum x_i^2<1\}$ は有界だが閉集合ではないのでコンパクトでない. また S^1 は $\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合であるから, n 次元トーラス $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$ は $\boldsymbol{R}^{2n}$ へ有界閉集合として埋め込むことができ, したがってコンパクトである. □

■ **例 4.5*** ■ **直交群 $O(n;\boldsymbol{R})$, ユニタリ群 $U(n)$** (参照 例 2.12, p.77)
n 次直交群は $O(n;\boldsymbol{R})=\{A\in M(n;\boldsymbol{R});{}^tAA=E\}$ で与えられる n 次正方行列の空間 $M(n;\boldsymbol{R})\approx\boldsymbol{R}^{n^2}$ の部分集合である. 行列 $A=(a_{ij})$ が $O(n;\boldsymbol{R})$ に属す条件はクロネッカーのデルタを用いて $\sum_k a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$ と表される. これは等式条件であるから $O(n;\boldsymbol{R})$ は閉部分集合で, また $a_{ij}^2\le\sum_k a_{kj}^2=1$ より $O(n;\boldsymbol{R})$ は有界でもある. したがって直交群はコンパクトな位相群である. 同様に特殊直交群 $SO(n;\boldsymbol{R})$, ユニタリ群 $U(n)$, 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ もコンパクトである. 一方で一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{R})$, $GL(n;\boldsymbol{C})$, 特殊線形群 $SL(n;\boldsymbol{R})$ などは有界でないからコンパクトではない. □

■ **例 4.6** ■ **カントール集合 C** (参照 例 1.51, p.48)
カントール集合 C は, 閉区間の有限和として与えられる C_n の共通部分として定義されたから有界閉集合であり, したがってコンパクトである. □

ハイネ: Heinrich Eduard Heine, 1821-1881.
ボレル: Émile Borel, 1871-1956.

定理 4.5 の仮定においては, ユークリッドの距離に関して有界であることが重要なのであって, 他の距離空間, あるいはユークリッド空間であっても距離関数をとりかえた場合にはこの命題は必ずしも正しくない (参照 命題 1.3, p.12).

次にルベーグ数の存在の応用としてコンパクト距離空間上の連続関数が一様連続であることを述べる. 一般に二つの距離空間 (X, d_X), (Y, d_Y) の間の写像 $\varphi: X \to Y$ が**一様連続**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x', x) < \delta$ のとき $d_Y(\varphi(x'), \varphi(x)) < \varepsilon$ が成立することをいう. 連続性の定義は各点 $x \in X$ において ε に対応する $\delta_x > 0$ が存在して, $d_X(x', x) < \delta_x$ のとき $d_Y(\varphi(x'), \varphi(x)) < \varepsilon$ が成立することであったから, 一様連続性はこの δ_x を $x \in X$ によらずにとることができることを意味している. 一様連続写像は当然連続である.

■ **例 4.7** ■　**リプシッツ連続写像**　(参照 例 1.12, p.15)

距離空間の間の写像 $\varphi: X \to Y$ がリプシッツ連続とは, 適当な $K > 0$ が存在して $d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) \leq K d_X(x, y)$ が成立することであったから, $\varepsilon > 0$ に対して一様に $\delta = \varepsilon / K$ をとることができる. したがってリプシッツ連続写像は一様連続である. しかし逆は正しくない. 例えば $f(x) = \sqrt{x}$ で与えられる $[0, 1]$ 上の関数 f は, $x \to +0$ のとき $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ となるからリプシッツ連続ではない. 一方で $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geq \varepsilon$ ならば, $\sqrt{x}, \sqrt{y} \geq 0$ より $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \varepsilon$ であり, したがって $|x - y| = |\sqrt{x} + \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geq \varepsilon^2$. いいかえれば $|x - y| < \varepsilon^2$ のとき $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ が成立するから, 関数 f は一様連続である (図 4.6).

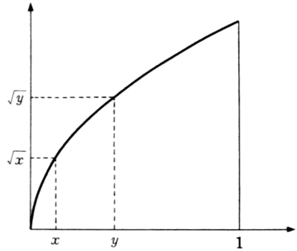


図 4.6　$f(x) = \sqrt{x}$　□

■ 例 4.8 ■ 多項式関数

多項式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ によって定義される関数 $p:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ は, 多項式の次数が 0 あるいは 1 のときにはリプシッツ連続で, したがって一様連続であるが, 次数が 2 以上のときには一様連続ではない. □

【定理 4.6】 コンパクト距離空間から距離空間への連続写像は一様連続である.

証明 (X,d_X) をコンパクト距離空間, (Y,d_Y) を任意の距離空間, $\varphi:X\to Y$ を連続写像とする. 任意の $\varepsilon>0$ をとる. φ の連続性より, 各点 $z\in X$ に対して $\delta_z>0$ が存在して, $z'\in U(z;\delta_z)$ のとき $d_Y(\varphi(z'),\varphi(z))<\varepsilon$ が成り立つ. このような開球 $U(z;\delta_z)$ の全体は X の開被覆をなすから, ルベーグ数, すなわち任意の点 $x\in X$ の δ-近傍がどれかの $U(z;\delta_z)$ に含まれるような $\delta>0$ が存在する. この δ に対して $d(x,x')<\delta$ を満たす x,x' をとれば, $x,x'\in U(z;\delta_z)$ なる z が存在し, したがって $d(\varphi(x),\varphi(x'))\leq d(\varphi(x),\varphi(z))+d(\varphi(z),\varphi(x'))\leq 2\varepsilon$ が成立する. ε は任意であったから, これは φ が一様連続であることを示している. ■

例えば実数空間の閉区間あるいはユークリッド空間の矩形上定義された連続関数がリーマン積分可能であることの証明には定理 4.6 が必要である.

4.1.3 コンパクト性の遺伝

ユークリッド空間の部分集合については, コンパクト性は有界かつ閉であることと同値であったが (定理 4.5, p.128), 一般の空間に対してコンパクト性を保証する十分条件としてどのようなものがあるだろうか. この項ではコンパクト空間に対して, その連続写像による像, 閉部分空間および直積空間が再びコンパクトであることを述べる. 最初に扱うコンパクト不変性の定理は, コンパクト空間上の連続関数に対して最大値の存在を保証する.

【定理 4.7 (コンパクト不変性)】 コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである.

証明　X をコンパクト空間, $\varphi: X \to Y$ を連続写像とする. 像 $\varphi(X)$ の開被覆 $\mathfrak{V}$ に対して, φ による**引き戻し**を $\varphi^*\mathfrak{V} = \{\varphi^{-1}(V); V \in \mathfrak{V}\}$ で定義すれば, これは X の開被覆となる (図 4.7). X のコンパクト性より $\varphi^*\mathfrak{V}$ は有限部分被覆 $\{\varphi^{-1}(V_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ をもつが, このとき $\bigcup V_i \supset \varphi\left(\bigcup \varphi^{-1}(V_i)\right) = \varphi(X)$ より $\{V_i\}$ は $\varphi(X)$ の有限部分被覆となる. したがって $\varphi(X)$ もコンパクトである.

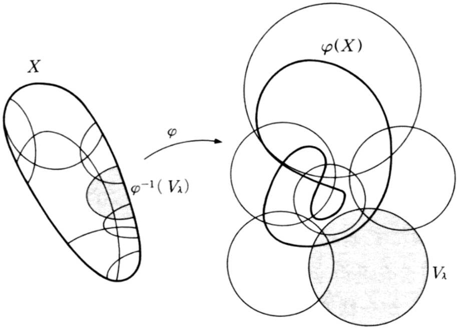


図 4.7　引き戻し　■

商空間はもとの空間の連続写像による像であるから, コンパクト空間の商空間はコンパクトである.

■ **例 4.9** ■ **射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ とクラインの壺**　(参照 例 2.21, p.88; 例 2.25, p.92)
射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ は球面 S^n の商空間, クラインの壺は正方形 $[0,1]\times[0,1]$ あるいはトーラス T^2 の商空間であったから, 双方ともコンパクトである.　□

【系 4.8 (最大値の定理)】　空でないコンパクト空間上の任意の連続関数は最大値および最小値をとる.

証明　X を空でないコンパクト空間, $f: X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. コンパクト不変性より X の像 $f(X)$ は実数空間 $\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合, すなわち有界閉集合で, しかも空ではないからその上限 $\sup f(X)$ は $f(X)$ に含まれる. よって $f(x_0) = \sup f(X)$ なる $x_0 \in X$ が存在するが, この x_0 での値が f の X での

最大値である．最小値に関してもまったく同様である． ■

ユークリッド空間の有界閉集合はコンパクトであったから，このような集合上定義された連続関数は最大値および最小値をとる．さらに例 4.11 で用いるように，ユークリッド空間上の連続関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ は，$\|x\|\to\infty$ のとき $f(x)\to\infty$ を満たすならば最小値をとる．実際 R を大きくとれば，仮定より $\|x\|\geq R$ のとき $f(x)\geq f(0)$ が成立する．ここでコンパクト集合 $B(0;R)=\{x;\|x\|\leq R\}$ に最大値の定理を用いれば，適当な $x_0\in B(0;R)$ が存在して $f(x_0)\leq f(x)$ が任意の $x\in B(0;R)$ に対して成り立つ．このとき特に $f(x_0)\leq f(0)$ であり，一方任意の $x\notin B(0;R)$ は $f(x)\geq f(0)$ を満たすから，$f(x_0)$ は f の $\boldsymbol{R}^n$ での最小値である．

■ 例 4.10 ■ 相加平均と相乗平均

正の数 $x_1,\cdots,x_n$ に対するよく知られた不等式

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ \geq\ \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

を証明しよう．これは和 $x_1+\cdots+x_n=a$ が一定という条件のもとでの，積 $x_1\cdots x_n$ の最大値を求める問題に帰着される．ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 $D=\{(x_1,\cdots,x_n);\ x_1+\cdots+x_n=a, x_i\geq 0\}$ は有界でかつ閉であるからコンパクトで，したがって積 $x_1\cdots x_n$ は D 上で最大値をとる．もし $x=(x_1,\cdots,x_n)$ において $x_i\neq x_j$ ならば，$x_ix_j<\left(\dfrac{x_i+x_j}{2}\right)^2$ より，和 $x_1+\cdots+x_n$ を変えずに積 $x_1\cdots x_n$ の値を大きくできるから，最大値をとる点においては $x_i=x_j$ でなければならない．すなわち積 $x_1\cdots x_n$ は $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{a}{n}$ のとき最大値をとる．したがって $x_1\cdots x_n\leq\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ が成り立つが，これが求める不等式であった． □

■ 例 4.11* ■ 代数学の基本定理（ガウス）

定数以外の任意の複素係数多項式が複素数内に根をもつことを示す．多項式を $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_0,\ a_n\neq 0,\ n\geq 1$ とおくと，$\dfrac{p(z)}{z^n}=a_n+a_{n-1}\dfrac{1}{z}+\cdots+a_0\dfrac{1}{z^n}$ より $|z|\to\infty$ のとき $|p(z)|\to\infty$．したがって連続関数 $z\mapsto|p(z)|$ は $\boldsymbol{C}$ で最小値をとる．最小値を与える点を $z_0\in\boldsymbol{C}$ とし，多項式 $p(z)$ を $z=z_0$ で $p(z)=b_0+b_k(z-z_0)^k+\cdots+b_n(z-z_0)^n,\ b_k\neq 0$ と展開する．もし $b_0\neq 0$ であれば極形式で $b_0=r_0e^{i\theta_0},\ b_k=r_ke^{i\theta_k}$ と表現するとき，$z=z_0+\rho e^{i\eta}$ に対して

$p(z)=r_0e^{i\theta_0}+r_k\rho^k e^{i\theta_k+ik\eta}+o(\rho^k)$ であるから (図 4.8), 偏角 η を $\theta_k+k\eta=\theta_0+\pi$ を満たすように選べば $p(z)=(r_0-r_k\rho^k)e^{i\theta_0}+o(\rho^k)$ が成り立つ. この η に対して $\rho>0$ を小さくとれば $|p(z)|<|p(z_0)|$ となり, z_0 が $|p(z)|$ の最小値を与えることに反する. したがって $b_0=0$ であり, z_0 は多項式 $p(z)$ の根である.

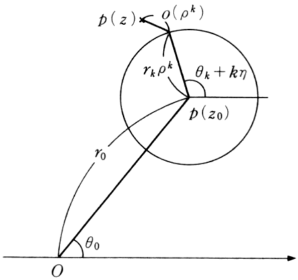


図 4.8 □

このように, 最大値あるいは最小値の存在を仮定すれば, 値そのものは制約条件から自然に定まることが多い. その意味からも存在問題は重要である.

■ **例 4.12*** ■ **ルベーグ数の存在**　(参照 定理 4.4, p.127)
ルベーグ数の存在も最大値の定理を用いて証明することができる. X を距離空間, A を X のコンパクト部分集合, $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_\lambda$ を A の開被覆とする. 各 $x\in A$ に対して $r(x)=\sup\{\varepsilon;$ 適当な λ に対して $U(x;\varepsilon)\subset V_\lambda\}$ とおくと, これは A 上至るところ正の値をとる関数である. 一方 $\rho=d(x,y)$ とするとき, $U(y;\varepsilon-\rho)\subset U(x,\varepsilon)$ であるから $r(y)\geq r(x)-\rho$. よって $|r(x)-r(y)|\leq d(x,y)$ が成り立ち, $r:A\to\boldsymbol{R}$ は X 上の連続関数である (図 4.9). したがって最大値の定理は r の A 上の最小

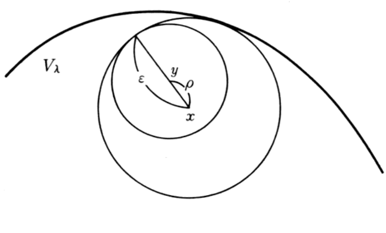


図 4.9

値 $r_0>0$ の存在を保証する. このとき $0<\delta<r_0$ なる δ をとれば, 任意の $x\in X$ に対して $\delta<r(x)$ より x の δ-開球 $U(x;\delta)$ を含む $\mathfrak{V}$ の元が存在する. すなわち δ は A の, 開被覆 $\mathfrak{V}$ に関するルベーグ数である. □

■ 例 4.13* ■ 有限次元ノルム空間 (参照 例 1.13, p.15; 例 1.30, p.32)
有限次元線形空間の任意のノルムがユークリドのノルムと同値であることを示す. V を n 次元線形空間, $\|\ \|_V$ を V 上のノルムとする. V の基底 $e_1,\cdots,e_n$ を選ぶことによって, 線形空間としての同型写像 $\varphi:\boldsymbol{R}^n\to V$, $\varphi(a_1,\cdots,a_n)=\sum a_ie_i$ が定義できる. この φ は全単射であり, またノルム空間の演算の連続性より連続でもある. さて $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合として $S^{n-1}=\{x=(x_i);\ \sum x_i^2=1\}$ を考えれば, これはコンパクトな部分集合であるから, 最大値の定理より, $x\in S^{n-1}$ に φ の像のノルムを対応させる関数 $x\mapsto\|\varphi(x)\|_V$ は S^{n-1} 上で最小値 $c_1>0$ と最大値 $c_2>0$ をとる. このとき各 $x\in\boldsymbol{R}^n$, $x\neq 0$ に対して $c_1\leq\left\|\varphi\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|_V\leq c_2$, したがって任意の $x\in\boldsymbol{R}^n$ に対して $c_1\|x\|\leq\|\varphi(x)\|_V\leq c_2\|x\|$ が成立する. これは $\boldsymbol{R}^n$ 上のユークリッドのノルム $\|\ \|$ と $\|\varphi(\cdot)\|_V$ が同値, すなわち $\|\ \|_V$ が φ による基底のもとでユークリッドのノルムと同値であることを示している. □

【定理 4.9】 コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである.

証明 X をコンパクト空間, A を X の閉部分集合とする. $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}$ を A の開被覆とするとき, この $\mathfrak{V}$ に開集合 $A^c=X\setminus A$ を加えた $\mathfrak{V}^*=\mathfrak{V}\cup\{A^c\}$ は X の開被覆となるから, 有限部分被覆 $\{V_{\lambda_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在する. 当然 $A\subset\bigcup V_{\lambda_i}$ であるが, この部分被覆のメンバーに A^c がはいっている場合にも, A^c は A とは共通部分をもたないから, 残りの開集合族で A を覆うことができる. すなわち $\mathfrak{V}$ は A の有限部分被覆をもつ. したがって A はコンパクトである. ■

■ 例 4.14* ■ 曲面の連結和 (参照 例 2.27, p.94)
コンパクトな曲面から埋め込まれた 2 次元円板の内部を取り除いた空間は, 定理 4.9 によってコンパクトである. したがってコンパクト空間の商空間がコンパクトであることから, 二つのコンパクトな曲面の連結和は再びコンパクトとなる. 特に種数 g の曲面はコンパクトである. □

最後にコンパクト空間の直積集合がコンパクトとなることを保証するチコノフの定理を述べる. 一般の直積空間に対するチコノフの定理の証明には選択公理 (p.228) あるいはそれと同等なツォルンの補題 (p.230) が必要であり, 逆にチコノフの定理から選択公理が導かれることも知られている. しかしここでは選択公理を用いる議論は避け, 有限直積および距離空間の可算直積の場合に限って証明を与える. 完全な証明に興味のある読者は [1], [2] を参照されたい.

【定理 4.10 (チコノフの定理)】　コンパクト空間の直積空間はコンパクトである.

"証明"　まず有限直積の場合を扱う. 二つのコンパクト空間 X, Y の直積空間 $X\times Y$ およびその開被覆 $\mathfrak{V}$ を考える. 直積空間 $X\times Y$ においては X の開集合と Y の開集合の積の全体 $\{U\times W\}$ が開集合系の基となっているから, 各 $V\in\mathfrak{V}$ は $V=\bigcup U_\lambda\times W_\lambda$ と表すことができる. すべての $V\in\mathfrak{V}$ についてこの和を考え, 現れる積 $U_\lambda\times W_\lambda$ の全体のなす族を改めて $\mathfrak{V}^*=\{U_\mu\times W_\mu\}$ とおく. これは開集合族で, $\bigcup_\mu U_\mu\times W_\mu=\bigcup_{V\in\mathfrak{V}}V=X\times Y$ より $X\times Y$ の被覆である. $\mathfrak{V}^*$ が有限部分被覆をもつことを示せば, 各 $U_\mu\times W_\mu$ に対してそれを含む $\mathfrak{V}$ の元が存在することから, もとの $\mathfrak{V}$ も有限部分被覆をもち, したがって $X\times Y$ がコンパクトであることが導かれる. さて $x\in X$ を固定するとき, 部分空間 $\{x\}\times Y$ は Y と同相であるからコンパクト. したがって $\mathfrak{V}^*$ を $\{x\}\times Y$ の被覆と考えれば, 有限部分被覆 $\{U_{\mu_i}\times W_{\mu_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在する (図 4.10). $U'_x=\bigcap U_{\mu_i}$ とおけば, $U'_x\times Y$ は $\{U_{\mu_i}\times W_{\mu_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ で覆われているが, U'_x は x を含む X の開集合であるから, X のコンパクト性より, そのうちの有限個 U'_j, $j=1,\cdots,k$ で X を覆うことができる. このとき各 $U'_j\times Y$ が $\mathfrak{V}^*$ の有限部分集合で覆われることから, 有限和 $\bigcup U'_j\times Y=X\times Y$ も $\mathfrak{V}^*$ の有限部分集合で覆うことができる. したがって $X\times Y$ がコンパクトであることが示された. 後は積空間の個数に関する数学的帰納法によって, 有限直積の場合が証明される.

次にコンパクト距離空間の可算直積がコンパクトであることを, 点列コンパクト性を用いて証明する. X_k, $k=1,2,\cdots$ をコンパクト距離空間, $X=\prod X_k$ を

ツォルン: Max A. Zorn, 1906-.

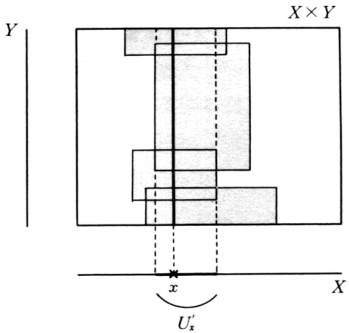


図 4.10

その直積空間とするとき, X の任意の点列 $\{x_n\}$ が収束部分列をもつことをいえばよい. $\mathrm{pr}_1 : X \to X_1$ を第一成分への射影とする. 各 x_n の第一成分よりなる X_1 の点列 $\{\mathrm{pr}_1(x_n)\}_{n=1,2,\cdots}$ は, X_1 がコンパクトであることから収束部分列をもつ. この部分列に対応するもとの点列 $\{x_n\}$ の部分列を $\{x_{1n}\}_{n=1,2,\cdots}$ とおく. 次に $\mathrm{pr}_2 : X \to X_2$を第二成分への射影とし, $\{x_{1n}\}$ の第二成分よりなる X_2 の点列 $\{\mathrm{pr}_2(x_{1n})\}$ を考える. 同じく X_2 のコンパクト性より $\{\mathrm{pr}_2(x_{1n})\}$ は収束部分列をもつから, これに対応する $\{x_{1n}\}$ の部分列を $\{x_{2n}\}_{n=1,2,\cdots}$ とおく. この操作を繰り返して, 各自然数 k に対して点列 $\{x_{kn}\}_{n=1,2,\cdots}$ が得られたとしよう. このとき対角線上の点列 $\{x_{mm}\}$ はもとの点列 $\{x_n\}$ の部分列であり, また任意の k について $m \geq k$ の部分は $\{x_{kn}\}$ の部分列であるから, その第 k 成分よりなる X_k の点列 $\{\mathrm{pr}_k(x_{mm})\}$ は収束する. したがって $\{x_{mm}\}$ 自身が X の直積位相に関して収束する. これは点列 $\{x_n\}$ が収束部分列をもつことを意味している. ■

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & & & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

チコノフの定理の逆も成立する. 直積空間 $\prod_\lambda X_\lambda$ がコンパクトであれば, 射影 $\mathrm{pr}_\lambda : \prod_\lambda X_\lambda \to X_\lambda$ が全射であることから (系 A.7, p.228), コンパクト不変性によってその像 X_λ もコンパクトである.

4.1.4　ハウスドルフ空間におけるコンパクト性

コンパクト不変性の定理は, コンパクト性が連続写像の順像に関して保たれることを主張する. 一方で, 写像の連続性は閉集合の逆像によって記述されるから, コンパクト性と閉であることの間に適当な関係があれば, 逆写像の連続性を導くことができる. このような関係をハウスドルフ性が保証するのである.

【命題 4.11】　ハウスドルフ空間のコンパクトな部分集合は閉集合である.

証明　X をハウスドルフ空間, A をコンパクト部分集合とし, 点 p を A の補集合 A^c からとる. X のハウスドルフ性より, 任意の $a\in A$ に対して a と p を分離する開集合 $p\in U_a$, $a\in V_a$, $U_a\cap V_a=\emptyset$ が存在する. U_a は p の近傍であるが, $a\in A$ に依存するので添え字 a を用いた. このような V_a の全体 $\{V_a\}$ は A の被覆をなすが, コンパクト性よりその有限部分被覆 $\{V_{a_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ が存在する (図 4.11).

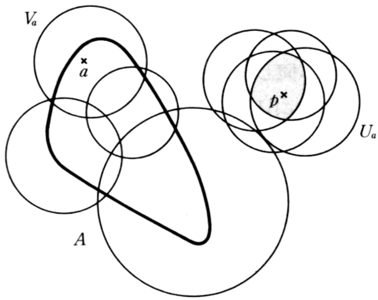


図 4.11

このとき V_{a_i} に対応する p の近傍 U_{a_i} の共通部分 $U=\bigcap U_{a_i}$ は, 各 i について $V_{a_i}\cap U\subset V_{a_i}\cap U_{a_i}=\emptyset$ を満たすから $\bigcup V_{a_i}$ と交わらず, したがって A と共通部分をもたない p の近傍となる. これは A^c が開集合であること, すなわち A が閉集合であることを示している. ■

【定理 4.12】　コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な単射は中への同相写像である. 特にコンパクト空間からハウスドルフ空間への連続な全単射は同相写像である.

証明 $\varphi : X \to Y$ をコンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続な単射とする. 逆写像 $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ の連続性を示すには, X の任意の閉集合 A に対して $(\varphi^{-1})^{-1}(A) = \varphi(A)$ が Y の閉集合となることをいえばよい. ここで A はコンパクト空間の閉部分集合であるからコンパクトで, コンパクト不変性より像 $\varphi(A)$ もコンパクトである. 一方 Y はハウスドルフであったから, 命題 4.11 によって $\varphi(A)$ は閉集合となる. したがって $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ は連続である. ■

■ 例 4.15 ■ 極座標 (参照 例 2.22, p.89)

直積 $S^{n-1} \times [0, \infty)$ において $S^{n-1} \times \{0\}$ を一点に縮めた空間 $X = S^{n-1} \times [0, \infty)/S^{n-1} \times \{0\}$ が n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に同相であることの別証明を述べる. 写像 $\varphi : S^{n-1} \times [0, \infty) \to \boldsymbol{R}^n$, $\varphi(x, r) = rx$ が導く $\bar{\varphi} : X \to \boldsymbol{R}^n$ は全単射でかつ連続であるから, 逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ が連続であることを示せばよい. $R > 0$ に対し, $\bar{\varphi}$ の $S^{n-1} \times [0, R]/S^{n-1} \times \{0\}$ への制限は連続な単射であるが, 定義域 $S^{n-1} \times [0, R]/S^{n-1} \times \{0\}$ はコンパクト空間の商空間であるからコンパクトで, 値域の $\boldsymbol{R}^n$ はハウスドルフであるから, この制限写像は中への同相写像である. よって定理 4.12 より, その像 $\bar{\varphi}(S^{n-1} \times [0, 1]/S^{n-1} \times \{0\}) = B(0; R)$ への逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ の制限は連続で, したがって $\bar{\varphi}^{-1}$ 自身が $B(0; R)$ の内部 $U(0; R)$ で連続である. $R > 0$ は任意であったから, $\bar{\varphi}^{-1}$ は定義域 $\boldsymbol{R}^n$ 全体で連続である. □

■ 例 4.16* ■ ホップ写像

複素平面の単位円 $S^1 = \{\alpha \in \boldsymbol{C}; |\alpha| = 1\}$ は複素数の積に関して位相群をなす. この群の 3 次元球面 $S^3 = \{(z, w) \in \boldsymbol{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ への作用を $\alpha : (z, w) \mapsto (\alpha z, \alpha w)$ で定義すると, 軌道空間 S^3/S^1 は 2 次元球面 S^2 と同相となる. これを証明しよう. S^2 をリーマン球面 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ と同一視し (例 2.26, p.93), 写像 $H : S^3 \to S^2$ を $H(z, w) = z/w$ で定める. この H は $w \neq 0$ に対しては連続で, $w = 0$ でもリーマン球面 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ の ∞ の近傍での座標が $1/\zeta, \zeta \in \boldsymbol{C}$ で与えられることから連続である. さらに H は S^1-不変, すなわち任意の $\alpha \in S^1$ に対し $H(\alpha(z, w)) = H(z, w)$ を満たすから連続写像 $\bar{H} : S^3/S^1 \to S^2$ を導く. 次に $H(z, w) = H(z', w')$ であれば, $\alpha = z'/z$ とおくとき $w' = \alpha w$ より $1 = |z'|^2 + |w'|^2 = |\alpha|^2(|z|^2 + |w|^2) = |\alpha|^2$ であるから $|\alpha| = 1$ で, この α に対し $\alpha(z, w) = (z', w')$ が成り立つから写像 $\bar{H} : S^3/S^1 \to S^2$

ホップ: Heinz Hopf, 1895-1971.

は単射. また各 $\zeta \in \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ に対して $H\left(\dfrac{\zeta}{\sqrt{1+|\zeta|^2}}, \dfrac{1}{\sqrt{1+|\zeta|^2}}\right) = \zeta$ より $\bar{H}$ は全射でもある. ここで $\bar{H}$ の定義域 S^3/S^1 はコンパクト空間 S^3 の商空間であるからコンパクト, 値域の S^2 はハウスドルフであるから, 定理 4.12 より $\bar{H}$ は同相写像である. したがって $H : S^3 \to S^2$ を商写像と見なすことができるが, これを**ホップ写像**と呼ぶ. 後に述べるように 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ に無限遠点 ∞ をつけ加えた空間は自然に 3 次元球面と同相となり (例 4.29, p.160), この同一視のもとで S^1 の作用の各軌道は図 4.12 のように表される. ∞ を通る軌道は z-軸である.

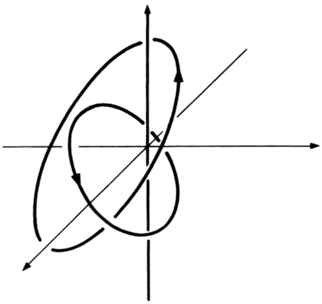


図 4.12 □

■ **例 4.17*** ■ **等質空間**　(参照 例 2.31, p.99)

位相群 G がハウスドルフ空間 X に, 写像 $\varphi_g : X \to X$, $g \in G$ によって作用しているとする. このとき点 $x_0 \in X$ を動かさない G の元の全体

$$G_{x_0} = \{g \in G\,;\ \varphi_g(x_0) = x_0\}$$

を x_0 の**等方部分群**と呼ぶ. 一点からなる X の部分集合 $\{x_0\}$ が閉であることから, G_{x_0} は G の閉部分群である. さて G がコンパクトであり, さらに作用が**推移的**, すなわち任意の $x, y \in X$ に対して $\varphi_g(x) = y$ なる $g \in G$ が存在すると仮定しよう. このとき写像 $\Psi : G \to X$, $g \mapsto \varphi_g(x_0)$ は全射であり, g, g' による像が一致する条件は $\varphi_g(x_0) = \varphi_{g'}(x_0)$ より $g^{-1}g' \in G_{x_0}$, すなわち等方部分群 G_{x_0} の右作用によって g と g' が移りあうことと等しいから, Ψ は連続な全単射 $\bar{\Psi} : G/G_{x_0} \to X$ を導く. G がコンパクトであれば Ψ の定義域である G/G_{x_0} も

コンパクトで, また値域の X はハウスドルフであったから $\bar{\Psi}$ は同相写像である. この議論を具体的な作用に適用すれば, 同相写像 $O(n;\boldsymbol{R})/O(n-1;\boldsymbol{R})\approx S^{n-1}$, $SO(n;\boldsymbol{R})/SO(n-1;\boldsymbol{R})\approx S^{n-1}$, $U(n)/U(n-1)\approx S^{2n-1}$, $SU(n)/SU(n-1)\approx S^{2n-1}$ が得られる. □

■ 例 4.18* ■ ハウスドルフ距離

X を距離空間とし, X の空でないコンパクト部分集合全体のなす空間を $\mathcal{K}(X)$ で表す. この空間 $\mathcal{K}(X)$ 上の**ハウスドルフ距離** d_H を, $A,B\in\mathcal{K}(X)$ に対して

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &= \sup_{a\in A}\bar{d}(a,B)+\sup_{b\in B}\bar{d}(b,A) \\ &= \inf\{r;\ A\subset U(B;r)\}+\inf\{r;\ B\subset U(A;r)\} \end{aligned}$$

で定める. ただし $\bar{d}(x,Y)=\inf_{y\in Y}d(x,Y)$ は点 $x\in X$ と部分集合 $Y\subset X$ との距離, $U(Y;\varepsilon)=\{x\in X;\ \bar{d}(x,Y)<\varepsilon\}$ は部分集合 Y の ε-近傍である. ハウスドルフ距離が距離の公理を満たすことを証明しよう. まず $\bar{d}(\cdot,B)$ は X 上の連続関数であったから, 空でないコンパクト集合 A 上で最大値をとる. したがって $\sup_{a\in A}\bar{d}(a,B)$ は有限で, 同じく $\sup_{b\in B}\bar{d}(b,A)$ も有限であるから $d_H(A,B)$ の意味は確定している. 対称性 $d_H(A,B)=d_H(B,A)$ および $d_H(A,B)\geq 0$, $d_H(A,A)=0$ は明らか. また $d_H(A,B)=0$ とすると $\sup_{a\in A}\bar{d}(a,B)=0$ より任意の $a\in A$ が B の閉包 $\overline{B}$ に含まれるが, $\overline{B}=B$ であるから $A\subset B$. 同様に $B\subset A$ でもあるから $A=B$. すなわち d_H は正値性を満たす. 最後に三角不等式は, $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$ に対して, 距離 d の三角不等式より $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$. 左辺の c について下限をとれば $\bar{d}(a,C)\leq d(a,b)+d(b,c)$. 今度は右辺の c について下限をとれば $\bar{d}(a,C)\leq d(a,b)+\bar{d}(b,C)$. 次に右辺第二項の b について上限をとれば $\bar{d}(a,C)\leq d(a,b)+\sup_{b\in B}\bar{d}(b,C)$, その後右辺第一項の b について下限をとれば $\bar{d}(a,C)\leq\bar{d}(a,B)+\sup_{b\in B}\bar{d}(b,C)$. 最後に a についての上限をまず右辺で, 次に左辺でとれば $\sup_{a\in A}\bar{d}(a,C)\leq\sup_{a\in A}\bar{d}(a,B)+\sup_{b\in B}\bar{d}(b,C)$, 同様に $\sup_{c\in C}\bar{d}(c,A)\leq\sup_{c\in C}\bar{d}(c,B)+\sup_{b\in B}\bar{d}(b,A)$ を得る. これらを辺々加えれば求める三角不等式となるから, d_H は距離の公理を満足する.

距離 d_H に関してコンパクト集合の列 A_n, $n=1,2,\cdots$ が収束するとき, その極限が $\bigcap_k\overline{\bigcup_{n\geq k}A_n}$ で与えられることを示す. 極限を A_∞ とおく. このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N が存在し, $n\geq N$ のとき $d_H(A_n,A_\infty)<\varepsilon$, すなわ

ち $A_n \subset U(A_\infty;\varepsilon)$ かつ $A_\infty \subset U(A_n;\varepsilon)$. そうすると $U(A_\infty;\varepsilon) \supset \bigcup_{n\geq N} A_n$ より $\overline{U(A_\infty;\varepsilon)} \supset \overline{\bigcup_{n\geq N} A_n} \supset \bigcap_k \overline{\bigcup_{n\geq k} A_n}$ で, A_∞ が閉集合で $\varepsilon>0$ が任意であることから $\bigcap_k \overline{\bigcup_{n\geq k} A_n} \subset A_\infty$. 一方 $A_\infty \subset U(\bigcup_{n\geq k} A_n;\varepsilon)$ がすべての $\varepsilon>0$ について成り立つことから $A_\infty \subset \overline{\bigcup_{n\geq k} A_n}$ であるが, k は任意にとることができるから $A_\infty \subset \bigcap_k \overline{\bigcup_{n\geq k} A_n}$. したがって $A_\infty = \bigcap_k \overline{\bigcup_{n\geq k} A_n}$ である. □

最後にコンパクトハウスドルフ空間の距離化について述べる.

【定理 4.13*】 コンパクトなハウスドルフ空間は正規性をもつ.

証明　X をコンパクトなハウスドルフ空間とする. X の交わらない閉部分集合 F, F' が開集合で分離されることを示せばよい. まず F' が一点よりなる集合 $\{y\}$ の場合を扱う. X がハウスドルフであることから, 各 $x\in F$ に対し, その開近傍 U_x と y の開近傍 V_x であって $U_x \cap V_x = \emptyset$ なるものが存在する. こうして得られた開集合族 $\{U_x\}_{x\in F}$ は F の被覆となるが, F はコンパクト空間 X の閉部分集合で F 自身もコンパクトであるから, 有限部分被覆 $\{U_{x_i}\}_{i=1,\cdots,N}$ が存在する. これに対応する V_{x_i}, $i=1,\cdots,N$ の共通部分 $V=\bigcap V_{x_i}$ は y の開近傍であり, 和集合 $\bigcup U_{x_i}$ と共通部分をもたないが, この和集合 $\bigcup U_{x_i}$ は F を含む開集合であった. これで F' が一点の場合の証明が得られた. 次に一般の場合を示す. 各 $y\in F'$ に対して先の議論で存在が保証された開集合 $F\subset U_y$ と $y\in V_y$ をとる. このとき F' がコンパクトであることから, 有限部分被覆 $\{V_{y_i}\}_{i=1,\cdots,M}$ が存在するから, 同様に $U=\bigcap U_{y_i}$, $V=\bigcup V_{y_i}$ とおけば, U と V は共通部分をもたない開集合であって, しかも $F\subset U$, $F'\subset V$ を満足する. ■

定理 4.13 と距離化定理 (p.119) をあわせれば, 第二可算公理を満たすコンパクトなハウスドルフ空間が距離化可能であることがわかるが, この逆も成立する. それを述べるためにまず全有界性を定義する. 距離空間 X が**全有界**あるいは**プレコンパクト**とは, 任意の $\varepsilon>0$ に対して ε-開球よりなる X の有限被覆が存在することをいう. コンパクトな距離空間は, その ε-開球全体のなす開被覆から有限部分被覆を選ぶことができるから全有界である. しかし全有界な距離空間は必ずしもコンパクトではない. 例えば実数空間の有限開区間は全有界ではある

けれどもコンパクトではない．また X の部分集合 E が**全有界**とは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，X の有限個の ε-開球で E を被うものが存在することをいう．これは E が部分距離空間として全有界であることと同値である．

【命題 4.14】 全有界な距離空間は可分である．

証明 X を全有界な距離空間とする．このとき任意の n に対し，$1/n$-開球による有限被覆 $\{U(x_{nk};1/n)\}_{k=1,\cdots,N_n}$ が存在するが，その中心の全体の $n=1,2,\cdots$ についての和集合 $\{x_{nk}\}_{k=1,\cdots,N_n,n=1,2,\cdots}$ は可算でかつ X で稠密である． ■

【定理 4.15*】 コンパクトなハウスドルフ空間が距離化可能であるための必要十分条件は第二可算公理を満足することである．

証明 コンパクト距離空間は全有界であるから，命題 4.14 によって可分であるが，距離空間においては可分性から第二可算性が導かれる (定理 2.8, p.69)．逆にコンパクトなハウスドルフ空間は定理 4.13 によって正規空間であり，第二可算公理を満たせば，距離化定理によって，その位相を定める距離関数が存在する． ■

<まとめ> 最初に空間のコンパクト性の開被覆による定義と有限交叉性，距離空間におけるコンパクトと点列コンパクトとの同値性およびルベーグ数の存在，次にコンパクト空間上の連続関数の一様連続性とコンパクト不変性の応用としての最大値の定理を述べた．最後にハウスドルフ空間におけるコンパクト性を扱ったが，与えられた写像が同相写像となるための十分条件は応用上重要である．

［例題］ 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の全体 $C[0,1]$ に一様ノルムによる位相を入れ，その上の連続線型汎関数全体を $C'[0,1]$ とおく．この $C'[0,1]$ は $[0,1]$ 上の符号つき測度の全体と一致し，また $\mathfrak{M}$ で，二条件

(i) $f(t)\geq 0,\ 0\leq t\leq 1$ を満たす関数 f に対して $\mu(f)\geq 0$.

(ii) $\mu(1)=1$. ただし左辺の 1 は常に値 1 をとる定数関数を表す．

を満たす $\mu\in C'[0,1]$ 全体を表せば，これは正規化された正値測度全体の空間である (**リースの定理**)．$C'[0,1]$ には弱位相，すなわち各 $f\in C[0,1]$ に対して写像 $\mathrm{ev}_f : C'[0,1]\to\boldsymbol{R}$ が連続となる最弱の位相を入れる．このとき以下を示せ．

(1) $\mathfrak{M}$ はコンパクトである．

(2) $C[0,1]$ は可分であったから (例 1.54, p.50) 稠密な可算部分集合 $D=\{f_i\}\subset C[0,1]$ が存在する．$\mathfrak{M}$ の位相はこの D に関する弱位相と一致し，したがって適当な距離関数によって与えられる．

(3) 連続写像 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ による測度 μ の像 $\varphi_*\mu$ を $\varphi_*\mu(f)=\mu(f\circ\varphi)$ によって定義する．このとき任意の連続写像 φ に対して不変な測度，すなわち $\varphi_*\mu=\mu$ を満たす $\mu\in C'[0,1]$ が存在する．測度 ν から $\nu_m=\dfrac{1}{m}(\nu+\varphi_*\nu+\cdots+\varphi_*^{m-1}\nu)$ によって定義される測度の列を考えよ．

(解) (1) $\mu\in\mathfrak{M}$ をとる．$f\in C[0,1]$ に対して $a_f=\|f\|$ とおけば，$-a_f\le f(t)\le a_f$，$0\le t\le 1$ であるから，条件 (i) より $\mu(-a_f)\le\mu(f)\le\mu(a_f)$ が成り立つ．条件 (ii) より $\mu(\pm a_f)=\pm a_f\mu(1)=\pm a_f$ であるから $-a_f\le\mu(f)\le a_f$．したがって $\mathfrak{M}$ は，直積空間 $\displaystyle\prod_{f\in C[0,1]}[-a_f,a_f]$ の元で線形性 $\mu(af+bg)=a\mu(f)+b\mu(g)$ を満たすもの全体のなす部分集合と位相を込めて一致している．線形性は等号条件であるから，この部分集合は閉集合で，$\prod[-a_f,a_f]$ がコンパクトであることから $\mathfrak{M}$ 自身もコンパクトである．

(2) D の各元 f_i について $\mathrm{ev}_{f_i}:\mathfrak{M}\to\boldsymbol{R}$ が連続であれば，任意の $f\in C[0,1]$ および $\mu\in\mathfrak{M}$ に対して ev_f が μ で連続であることを証明しよう．任意の $\varepsilon>0$ をとる．D は稠密であったから $\|f_i-f\|_\infty<\varepsilon$ を満たす $f_i\in D$ が存在する．この f_i について ev_{f_i} は連続であるから，μ の $\mathfrak{M}$ における近傍 U であって，各 $\mu'\in U$ が $|\mathrm{ev}_{f_i}(\mu)-\mathrm{ev}_{f_i}(\mu')|<\varepsilon$ を満たすものが存在する．一方で $\|f_i-f\|_\infty<\varepsilon$ より $|\mu'(f_i)-\mu'(f)|\le\varepsilon$ が成立する．最後の不等式は $\mu'=\mu$ としても正しいから，

$$\begin{aligned}|\mathrm{ev}_f(\mu')-\mathrm{ev}_f(\mu)| &= |\mu'(f)-\mu(f)|\\ &\le |\mu'(f)-\mu'(f_i)|+|\mu'(f_i)-\mu(f_i)|+|\mu(f_i)-\mu(f)| < 3\varepsilon\,.\end{aligned}$$

これは ev_f が μ で連続であることを示している．

リース: Frédélic Riesz, 1880-1956.

(3) 距離空間においてはコンパクトと点列コンパクトが同値であったから, $\mathfrak{M}$ は点列コンパクトである. したがって問題で与えられた測度の列 $\{\nu_m\}$ は収束部分列をもつ. この部分列を $\{\nu_{m'}\}$, 極限を ν_∞ とおく. このとき $\varphi_*\nu_m = \frac{1}{m}(\varphi_*\nu+\cdots+\varphi_*^m\nu)$ より $\nu_{m'}-\varphi_*\nu_{m'}=\frac{1}{m'}(\nu-\varphi_*^{m'}\nu)$ であり, 任意の $f\in C[0,1]$ に対して $(\nu_{m'}-\varphi_*\nu_{m'})(f)=\frac{1}{m'}\nu(f-f\circ\varphi^{m'})$, したがって $|(\nu_{m'}-\varphi_*\nu_{m'})(f)|\le\frac{2}{m'}\|f\|$ が成り立つ. $m'\to\infty$ のとき $\nu_{m'}\to\nu_\infty$, $\varphi_*\nu_{m'}\to\varphi_*\nu_\infty$ であるから $\varphi_*\nu_\infty=\nu_\infty$, すなわち ν_∞ は φ-不変である. ■

4.2* 局所コンパクト性とパラコンパクト性

コンパクト性を拡張した二つの概念, 局所コンパクト性とパラコンパクト性を扱う. 局所コンパクト性はその名のとおり局所的な性質であり, 一方のパラコンパクト性は大域的な性質である.

4.2.1 局所コンパクト空間

位相空間 X が**局所コンパクト**であるとは, X の各点 x に対して, x の近傍でコンパクトなものが存在するときをいう. 特に X 自身がコンパクトであれば, その各点はコンパクト集合である X を近傍としてもつ. したがってコンパクト空間は局所コンパクトである. またコンパクト空間の閉部分集合がコンパクトであることから, 局所コンパクト空間の閉部分集合は局所コンパクトとなる.

■ 例 4.19 ■ ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の各点 x は閉球 $B(x;r)$, $r>0$ を近傍としてもつ. 閉球 $B(x;r)$ は有界閉集合であるからコンパクトで, これよりユークリッド空間が局所コンパクトであることがわかる. 特に実数空間 $\boldsymbol{R}$ は局所コンパクトである. □

局所コンパクト性の条件は, 各点に対して一つコンパクトな近傍が存在することを保証するだけであるが, ハウスドルフ性のもとでは, この条件からいくらでも小さいコンパクトな近傍が存在することが導かれる. 特にハウスドルフかつ局所コンパクトな空間の開部分集合は再び局所コンパクトとなる.

【命題 4.16】 局所コンパクトなハウスドルフ空間の各点はコンパクト集合よりなる基本近傍系をもつ.

証明　X を局所コンパクトなハウスドルフ空間, x をその点とする. 仮定より x のコンパクトな近傍 K が存在するが, この K はコンパクトなハウスドルフ空間であるから正規である (定理 4.13, p.142). さて U を X における x の開近傍とするとき, $\{x\}$ および $K\backslash U$ はともに正規空間 K の閉部分集合で共通部分をもたないから, これらを分離する K の開集合 $x\in V$, $K\backslash U\subset V'$ が存在する (図 4.13). この V の K での閉包 $\overline{V}$ は $K\backslash V'$ に含まれるから $U^c=X\backslash U$ とは交わらない. すなわち $\overline{V}\subset U$. また K が x の近傍であり, V が K における x の近傍であることから, $\overline{V}$ は X における x の近傍である. さらに $\overline{V}$ はコンパクト集合 K の閉部分集合であるからコンパクト. 以上より x の任意の開近傍 U に対し, $x\in\overline{V}\subset U$ なるコンパクトな近傍 $\overline{V}$ が存在する. これは x がコンパクト集合よりなる基本近傍系をもつことを示している.

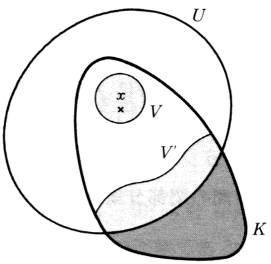


図 4.13　■

■ **例 4.20** ■　**多様体**

局所コンパクト空間の典型例は多様体である. 空間 X が **n 次元多様体**, 正確には **n 次元位相多様体**であるとは, X がハウスドルフであり, かつ各点 $x\in X$ が n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開球と同相な近傍をもつときをいう. ユークリッド空間が局所コンパクトであったから, 多様体も同じく局所コンパクトとなる. ユークリッド空間およびその開部分集合は当然多様体である. 球面 $S^n=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1});\ \sum x_i^2=1\}$ も多様体の構造をもつが, これは以下のように示される. 各点 $p=(p_1,\cdots,p_{n+1})\in S^n$ に対して, 内積 $x\cdot p=\sum x_ip_i$ を用いて S^n での

近傍 U_p を $\{x\in S^n;\ x\cdot p>0\}$ で定義する. 一方でベクトル p と直交する超平面を H_p, すなわち $H_p=\{v;\ v\cdot p=0\}$ とおき, 直交射影を $\mathrm{pr}_p:\boldsymbol{R}^{n+1}\to H_p$ とすれば, $\mathrm{pr}_p\big|_{U_p}:U_p\to H_p$ は U_p から H_p の開球 $U(0;1)$ への同相写像となる. この他にもトーラス, クラインの壺, 射影空間などが多様体の構造をもつ. □

■ **例 4.21** ■ **局所コンパクトノルム空間** (参照 例 4.13, p.135)

有限次元ノルム空間はユークリッド空間と線形写像によって同相であったから, 特に局所コンパクトである. 逆に局所コンパクトなノルム空間は有限次元に限ることを以下で証明しよう. まずノルム空間 V が局所コンパクトであることと単位球面 $S=\{v;\|v\|=1\}$ がコンパクトであることの同値性を示す. 単位球面 S がコンパクトならば, 直積空間 $S\times[0,1]$ もコンパクトであり, 連続写像 $S\times[0,1]\to V$, $(v,r)\mapsto rv$ によるその像 $D=\{v;\|v\|\leq 1\}$ がコンパクトとなる. したがって原点 $0\in V$ がコンパクトな近傍をもつから, ノルム空間の等質性より任意の点がコンパクトな近傍をもつ. 逆に V が局所コンパクトであれば, 原点 $0\in V$ のコンパクトな近傍 K が存在する. $\varepsilon>0$ を小さくとれば, ε-球面 $S_\varepsilon=\{v;\|v\|=\varepsilon\}$ は K に含まれる閉集合であるからコンパクト. よって同相写像 $V\to V$, $v\mapsto\varepsilon^{-1}v$ による S_ε の像である単位球面 S もコンパクトである.

さてノルム空間 V が有限次元でないとき, 単位球面 S に属するベクトルの列 $u_1,u_2,\cdots$ であって, $i\neq j$ に対して $\|u_i-u_j\|\geq 1$ を満たすものを帰納的に構成しよう. そうするとこの点列が収束部分列を含まないことから S はコンパクトではなく, V が局所コンパクトでないことがわかる. まず任意に 0 以外のベクトル v をとり $u_1=\dfrac{1}{\|v\|}v$ とおく. 次にこのようなベクトルが $u_1,\cdots,u_n$ まで構成されたと仮定して, H をこれらで張られる V の n 次元部分空間とする. V は無限次元であったから, H に属さないベクトル $v\in V$ が存在する. この v を用いて H 上の実数値関数を $f(x)=\|v-x\|$ で定義すると, f は連続で, しかも $f(x)\geq\|x\|-\|v\|$ より $\|x\|\to\infty$ のとき $f(x)\to\infty$ を満たす. 一方で H は有限次元であるから, そのノルムはユークリッドのノルムと同値で, したがって最大値の定理 (p.132) より f は H 上最小値をとる. この最小値を与えるベクトルを $\bar{x}$ とし, $\bar{v}=v-\bar{x}$ とおくと, 任意の $x\in H$ に対し $\|\bar{v}\|\leq\|\bar{v}-x\|$ が成立する (図 4.14). $u_{n+1}=\dfrac{1}{\|\bar{v}\|}\bar{v}$ とおけば, 同じく任意の $x\in H$ に対し $\|u_{n+1}-x\|\geq\|u_{n+1}\|$ が成立

し, かつ $\|u_{n+1}\|=1$ であるから, 特に $\|u_{n+1}-u_i\|\geq\|u_{n+1}\|=1$. 求める u_{n+1} が得られたから, これを繰り返せば点列 $\{u_n\}$ が帰納的に構成できる.

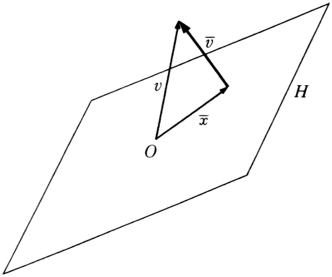


図 4.14 □

最後にベール空間について述べる. 位相空間 X の部分集合 A が**第一類**であるとは, A が X の疎な部分集合の可算和として表されるときをいい, そうでないとき A は**第二類**であるという. 第一類の集合の部分集合, 可算和はまた第一類である. さて位相空間 X が**ベール空間**であるとは, 任意の第一類の部分集合 A に対し, その補集合 $A^c=X\setminus A$ が X で稠密であるときをいう. この条件は X の任意の稠密開部分集合 O_i の可算共通部分 $\bigcap O_i$ がまた X で稠密となることと同値である. ベール空間 X において, 稠密開部分集合の可算共通部分を含むような部分集合を**生成的**という.

【定理 4.17】 局所コンパクトなハウスドルフ空間はベール空間である.

証明　X を局所コンパクトなハウスドルフ空間, 開かつ稠密であるような X の部分集合の可算族を $O_n, n=1,2,\cdots$ とする. 任意の $x_0\in X$ の任意の近傍 N が共通部分 $\bigcap O_n$ と交わることを示せばよいが, このとき N はコンパクトと仮定してもよい (命題 4.16). 以下で有限交叉性をもつ N の閉部分集合族 $\{K_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を構成する. まず O_1 が稠密であることと, N が内部をもつことから, $O_1\cap\mathring{N}$ は空ではない. この集合から点 x_1 をとれば, $O_1\cap\mathring{N}$ は開集合で x_1 の近傍であるから x_1 のコンパクトな近傍 K_1 で $O_1\cap\mathring{N}$ に含まれるものが存在する. 次にこの議論を稠密な開集合 O_2 と x_1 のコンパクトな近傍 K_1 に適用すれば,

ベール: René Baire, 1874-1932.

$x_2 \in O_2 \cap \mathring{K}_1$ を満たす点 x_2 および x_2 のコンパクトな近傍 K_2 で $O_2 \cap \mathring{K}_1$, したがって $O_1 \cap O_2$ に含まれるものが存在する. これを繰り返せば空でないコンパクト集合の列 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ で, $K_n \subset O_1 \cap \cdots \cap O_n$ を満たすものが得られる. X のハウスドルフ性より, この族 $\{K_n\}$ は閉集合の減少列で有限交叉性をもつ. したがって最初にとった N がコンパクトであることから共通部分 $\bigcap K_n$ は空ではない. $\bigcap K_n \subset (\bigcap O_n) \cap N$ であるから, これは $\bigcap O_n$ が N と共通部分をもつこと, すなわち $\bigcap O_n$ が X で稠密であることを示している. ■

■ 例 4.22 ■ 連続関数の各点収束極限 (ベール)

空間 X 上の連続関数の列 $\{f_n\}$ が**各点収束**するとは, 各 $x \in X$ に対して数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するときをいう. このとき極限 $f(x) = \lim f_n(x)$ は X 上の関数であるが, 極限関数 $f(x)$ の不連続点全体は第一類の集合となる. 特に X がベール空間であれば, 極限関数は X の稠密な部分集合上連続である. これを証明しよう. 正の数 ε に対し $A_N(\varepsilon) = \{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,\ n, m \geq N\}$ とおくと, 各 $A_N(\varepsilon)$ は閉集合 $\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}$ の共通部分であるから閉集合で, したがってその境界 $\mathrm{Fr}A_N(\varepsilon) = A_N(\varepsilon) \setminus \mathrm{Int}A_N(\varepsilon)$ は疎な部分集合である (例 1.50, p.48). 一方で関数列 $\{f_n\}$ は各点収束するから $X = \bigcup_N A_N(\varepsilon) = \left(\bigcup_N \mathrm{Fr}A_N(\varepsilon)\right) \cup \left(\bigcup_N \mathrm{Int}A_N(\varepsilon)\right)$ が成立し, これより $A(\varepsilon) = \bigcup_N \mathrm{Int}A_N(\varepsilon)$ の補集合 $A(\varepsilon)^c = X \setminus A(\varepsilon)$ は第一類の集合である. この $A(\varepsilon)$ すべての共通部分 $A = \bigcap_\varepsilon A(\varepsilon)$ は, 形式的には連続濃度の集合族の共通部分であるが, $A(\varepsilon)$ の単調性, すなわち $\varepsilon < \varepsilon'$ に対して $A(\varepsilon) \subset A(\varepsilon')$ が成り立つことから, 可算共通部分 $\bigcap_k A(1/k)$ と等しく, よって A の補集合 A^c も第一類の部分集合である. したがって $A = \bigcap_\varepsilon A(\varepsilon)$ 上で極限関数 $f(x)$ が連続であることを証明すればよい. x を A の点, ε を任意の正の数とする. $x \in A(\varepsilon) = \bigcup_N \mathrm{Int}A_N(\varepsilon)$ より, x の近傍 U が存在して, 十分大きい N に対して $U \subset A_N(\varepsilon)$. すなわち任意の $x' \in U$, $n \geq N$ に対して, 不等式 $|f_N(x') - f_n(x')| \leq \varepsilon$ が成立するが, これより $n \to \infty$ なる極限をとれば $|f_N(x') - f(x')| \leq \varepsilon$ が成り立つ. ここで f_N は連続関数であるから, x の近傍 V を小さくとれば, $x' \in V$ に対して $|f_N(x') - f_N(x)| < \varepsilon$ が成り立つとしてよい. そうすると任意の $x' \in U \cap V$ に対して

$$|f(x') - f(x)| \ \leq\ |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \ <\ 3\varepsilon$$

が成立する．これは関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が点 x で連続であることを示している．

例えば関数 $f : [0,1] \to \boldsymbol{R}$ が すべての点 $x \in [0,1]$ で微分可能であったとしよう．このとき導関数 $f'(x)$ は，関数列 $F_n(x) = \dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$ の各点収束極限として与えられるから，その不連続点の全体は高々第一類の集合である．　□

4.2.2　パラコンパクト空間

X を空間，$\mathfrak{E}$ をその被覆とする．もう一つの X の被覆 $\mathfrak{E}'$ が $\mathfrak{E}$ の**細分**であるとは，任意の $E' \in \mathfrak{E}'$ に対して $E' \subset E$ を満たす $E \in \mathfrak{E}$ が存在するときをいう．また被覆 $\mathfrak{E}$ が**局所有限**であるとは，各点 $x \in X$ に対して適当な x の近傍 N をとれば N と共通部分をもつような $\mathfrak{E}$ の元が有限個であるときをいう．さて空間 X が**パラコンパクト**とは，X の任意の開被覆に対し，その細分であって局所有限であるような開被覆が存在するときをいう．コンパクト空間においては任意の開被覆は有限部分被覆をもつ．有限被覆は局所有限であり，部分被覆はもとの被覆の細分であるから，コンパクト空間はパラコンパクトである．

■ 例 4.23 ■　ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ のパラコンパクト性

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ がパラコンパクトであることを証明しよう．任意の開被覆 $\mathfrak{V}$ に対して，その細分である局所有限開被覆を構成すればよい．まず $\boldsymbol{R}^n$ がコンパクト部分集合 $A_k = \{x \in \boldsymbol{R}^n; k \le \|x\| \le k+1\}$ の和であることに注意する．$\mathfrak{V}$ は各 A_k の開被覆でもあるから，有限個の $U_{k\ell} \in \mathfrak{V}$, $\ell = 1, \cdots, N_k$ で A_k を覆うことができる．その元 $U_{k\ell}$ に対し $U'_{k\ell} = U_{k\ell} \setminus A_{k-1}$ とおけば，これは開集合で $A_k \setminus A_{k-1} \subset \bigcup_\ell U'_{k\ell}$ を満たす (図 4.15)．したがってその全体 $\mathfrak{V}' = \{U'_{k\ell}\}_{k,\ell}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開被覆をなす．一方で任意の $x \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，適当な A_k が x の近傍となり，また $k' > k$ のとき $U'_{k'\ell}$ が A_k と交わらないことから，この $\mathfrak{V}'$ は局所有限

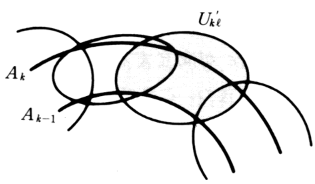


図 4.15

である. $\mathfrak{V}'$ が $\mathfrak{V}$ の細分となっていることは構成から明らかであろう.

一般に位相空間 X が **σ-コンパクト**であるとは, X のコンパクト部分集合の可算列 $K_1, K_2, \cdots$ が存在して $X = \bigcup K_n$ と書けるときをいう. ユークリッド空間の場合と同様にして, 局所コンパクトかつ σ-コンパクトなハウスドルフ空間はパラコンパクトであることが証明できる. 余力があれば試みられたい. □

任意の距離空間はパラコンパクトであることが知られているが, ここではその証明には触れない. 興味のある読者は [2], [16] を参照されたい.

空間 X 上の連続関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ に対して, その**台**を

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{Cl}\{x;\ f(x) \neq 0\}$$

で定義する. 右辺の Cl は閉包を表す. 位相空間 X における **1 の分割**とは, 次の条件を満たす連続関数 $f_\lambda : X \to \boldsymbol{R}$ の族をいう.

(PU_1) $f_\lambda(x) \geq 0$.

(PU_2) 台の全体 $\{\mathrm{supp}(f_\lambda)\}_\lambda$ は局所有限な X の被覆.

(PU_3) $\displaystyle\sum_\lambda f_\lambda(x) = 1$.

条件 (PU_3) の左辺は無限和であるが, (PU_2) より $f_\lambda(x) \neq 0$ を満たすような λ は各 $x \in X$ に対して有限個であるからこの和は意味をもつ. また 1 の分割 $\{f_\lambda\}$ が開被覆 $\mathfrak{V}$ に**従属する**とは, 台のなす被覆 $\{\mathrm{supp}(f_\lambda)\}_\lambda$ が $\mathfrak{V}$ の細分であること, すなわち各 f_λ に対して $\mathrm{supp}(f_\lambda) \subset V$ なる $V \in \mathfrak{V}$ が存在することをいう.

パラコンパクト性は, 定義自体よりも, それが任意の開被覆に従属する 1 の分割の存在を保証することの意味の方が大きいであろう. 以下でこれを証明する. まずパラコンパクト空間がハウスドルフならば正規であることを示すが, 証明はコンパクト空間に対する定理 4.13 (p.142) と本質的に同じである.

【定理 4.18】 パラコンパクトなハウスドルフ空間は正規である.

証明 X をパラコンパクトなハウスドルフ空間, F, F' を X の交わらない閉部分集合とする. F と F' を分離する開集合の存在を示せばよいが, まず F' が一点よりなる集合 $\{y\}$ の場合を扱う. U を F の補集合, すなわち $U = X \backslash F$ とする. X のハウスドルフ性より各 $x \in F$ に対して, y と x の開近傍 $y \in U_x$, $x \in V_x$ で共通部

分をもたないものが存在する．この V_x の全体に U を加えた $\mathfrak{V}=\{U\}\cup\{V_x\}_{x\in F}$ は X の開被覆であるから，パラコンパクト性によって，その細分で局所有限な開被覆 $\mathfrak{V}'$ が存在する．この $\mathfrak{V}'$ の元のうち U に含まれるもの以外を $\{V'_\lambda\}_\lambda$ とし，その和集合を $V'=\bigcup V'_\lambda$ とおく．各 $x\in F$ は U には属さないから，これを含む V'_λ が存在する．したがって $F\subset V'$ である．さて $\mathfrak{V}'$ が局所有限であることから，y の適当な近傍 U' をとれば U' と共通部分をもつ V'_λ が有限個であるとしてよい．この有限個を改めて V'_i, $i=1,\cdots,n$, 各 V'_i を含む $\mathfrak{V}$ の元を V_i とし，対応する y の開近傍を U_i, $i=1,\cdots,n$ とする．そうすると $U''=U\cap\bigcap U_i$ もまた y の近傍で，$U_i\cap V_i=\emptyset$ より U'' は V' とは交わらない．V' は F を含む開集合であったから，一点 y とこれを含まない閉集合 F が開集合で分離できることが示された．一般の場合には，各 $y\in F'$ に対して先の議論で存在が保証された開集合 $y\in U_y$ と $F\subset V_y$ をとる．この U_y の全体と F' の補集合 $V'=X\backslash F'$ よりなる X の開被覆 $\mathfrak{V}=\{V'\}\cup\{V_y\}_{y\in F'}$ を考え，その細分で局所有限な開被覆に対して同じ議論を繰り返せば，F および F' を含む開集合で共通部分をもたないものの存在が示される． ■

【定理 4.19】 パラコンパクトなハウスドルフ空間の任意の開被覆に対して，これに従属する 1 の分割が存在する．

証明　X をパラコンパクトなハウスドルフ空間，$\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする．まず $\mathfrak{V}$ と同じ添数集合 Λ をもつ X の開被覆 $\mathfrak{V}'=\{V'_\lambda\}$ であって，各 λ について $\overline{V'_\lambda}\subset V_\lambda$ を満たし，かつ各元の閉包よりなる族 $\{\overline{V'_\lambda}\}$ が局所有限な $\mathfrak{V}$ の細分となるものを構成する．各 $x\in X$ に対し $x\in V_\lambda$ なる V_λ をとる．このとき $\{x\}$ と $X\backslash V_\lambda$ は交わらない閉集合であるから，定理 4.18 より，これらを分離する開集合 $x\in W_x$, $X\backslash V_\lambda\subset W'_x$, $W_x\cap W'_x=\emptyset$ が存在する．この W_x 全体のなす X の開被覆 $\{W_x\}_{x\in X}$ に対して，細分である局所有限開被覆 $\{W'_\mu\}$ をとれば，各 W'_μ は適当な W_x に含まれるから，$\overline{W'_\mu}\subset\overline{W_x}\subset V_\lambda$ なる λ が存在する．このような λ のひとつを $\lambda(\mu)$ と書き，$V'_\lambda=\bigcup_{\lambda(\mu)=\lambda}W'_\mu$ とおく (図 4.16)．そうすると $\mathfrak{V}'=\{V'_\lambda\}$ は X の開被覆をなす．ここで $\mathfrak{W}'=\{W'_\mu\}$ が局所有限であることから，その閉包よりなる族 $\{\overline{W'_\mu}\}$ も局所有限で，特に $\overline{V'_\lambda}=\bigcup_{\lambda(\mu)=\lambda}\overline{W'_\mu}\subset V_\lambda$ が成り立ち，かつ $\{\overline{V'_\lambda}\}$ も局所有限となる．

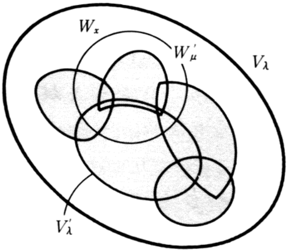


図 4.16

さて $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}$ に従属する 1 の分割の存在を証明しよう. $\mathfrak{V}$ に対して上で保証された開被覆 $\{V'_\lambda\}$ をとり, さらにこの $\{V'_\lambda\}$ に対して同じく $\{V''_\lambda\}$ をとる. このとき V''_λ の閉包は $X\backslash V'_\lambda$ とは交わらないから, ウリゾーンの補題 (p.116) によって連続関数 $g_\lambda : X\to[0,1]$ であって, $\mathrm{supp}(g_\lambda)\subset\overline{V'_\lambda}$ かつ $x\in V''_\lambda$ に対して $g_\lambda(x)=1$ を満たすものが存在する. この関数族を用いて形式的に $g(x)=\sum_\lambda g_\lambda(x)$ とおく. 右辺は無限和だが, $\{\overline{V'_\lambda}\}$ が局所有限であることから, 各点 $p\in X$ に対して適当な近傍 $p\in U$ をとれば U 上で 0 でない g_λ は有限個のみ. したがって U 内では g は有限和で与えられるから確定した値をとり, しかも連続である. 点 $p\in X$ は任意であったから結局 g は X 上で定義され, かつ連続. また $\{V''_\lambda\}$ が X の被覆であることから g は至るところ正の値をとる. この g を用いて $f_\lambda(x)=\dfrac{g_\lambda(x)}{g(x)}$ とおけば, $\mathrm{supp}(f_\lambda)=\mathrm{supp}(g_\lambda)\subset\overline{V'_\lambda}\subset V_\lambda$ かつ $\sum f_\lambda(x)=\dfrac{\sum g_\lambda(x)}{g(x)}=1$ であるから, この族 $\{f_\lambda\}$ が求める 1 の分割となる. ■

■ 例 4.24 ■ パラコンパクト多様体

通常, 多様体にはハウスドルフ性と局所ユークリッド性に加えてパラコンパクト性を要求する. この仮定のもとで多様体は距離化可能であることを説明しよう. M を n 次元のパラコンパクトな多様体とする. 定義から M の各点 p は n 次元ユークリッド空間の開球と同相な近傍 U_p をもつが, 必要なら小さくとり直すことによって U_p の M での閉包がコンパクトと仮定してもよい. このような近傍の全体 $\{U_p\}_{p\in M}$ は M の開被覆をなすから, パラコンパクト性によって $\{U_p\}$ に従属した 1 の分割 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する. 各 f_λ の台 $\mathrm{supp}(f_\lambda)$ を含む開被覆の元を改めて U_λ とおき, U_λ から $\boldsymbol{R}^n$ の開球への同相写像を $\varphi_\lambda : U_\lambda\to\boldsymbol{R}^n$ と書

く. この f_λ と φ_λ を用いて写像 $\psi_\lambda : M \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\psi_\lambda(p)=(f_\lambda(p)\varphi_\lambda(p), f_\lambda(p))$ で, さらに $\Psi : M \to (\boldsymbol{R}^{n+1})^\Lambda$ を $\Psi(x)=(\psi_\lambda(x))$ で定義する. この写像 Ψ は単射である. 実際 $p \in M$ に対して $f_\lambda(p)>0$ なる λ が存在する. もし p と異なる $q \in M$ に対して $f_\lambda(p) \neq f_\lambda(q)$ ならば $\Psi(p) \neq \Psi(q)$. また $f_\lambda(p)=f_\lambda(q)$ ならば, p, q はともに U_λ に属するが, $p \neq q$ より $\varphi_\lambda(p) \neq \varphi_\lambda(q)$. したがってこの場合も $\Psi(p) \neq \Psi(q)$ である. この単射 Ψ と $\boldsymbol{R}^{n+1}$ のユークリッドのノルムを用いて M 上の距離関数を $d(p,q)=\sum_\lambda \|\psi_\lambda(p)-\psi_\lambda(q)\|$ で定義しよう. 右辺は形式的には無限和であるが, 被覆 $\{\mathrm{supp}(f_\lambda)\}$ が局所有限であることから, 各 p, q に対して $\psi_\lambda(p)$, $\psi_\lambda(q)$ が 0 とならないような λ はおのおの有限個しかなく, 和は意味をもつ. また Ψ が単射であることから, この d は距離の公理を満たす. あとは M のもとの位相が d によって定義される位相と等しいことを示せばよい. 点 $p \in M$ に対して $f_{\lambda_0}(p)>0$ なる λ_0 を選ぶ. このとき $K_p=\mathrm{supp}(f_{\lambda_0})$ は p のコンパクトな近傍で, その各点が被覆 $\{\mathrm{supp}(f_\lambda)\}$ のうちの有限個としか交わらないような開近傍をもつから, K_p 自身が $\{\mathrm{supp}(f_\lambda)\}$ のうちの有限個としか交わらない. このような添数で λ_0 以外のものを $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ とおく. さて Ψ は連続な単射で K_p はコンパクトであったから, Ψ は中への同相写像である (定理 4.12, p.138). また像 $\Psi(K_p)$ は $(\boldsymbol{R}^{n+1})^\Lambda$ の有限次元線形部分空間 $X_{\lambda_0,\cdots,\lambda_m}=\{(x_\lambda); x_\lambda=0, \lambda \neq \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ に含まれるが, この部分空間上の相対位相は $(\boldsymbol{R}^{n+1})^{\{\lambda_0,\cdots,\lambda_m\}}$ のユークリッドのノルムで定義されていると考えてよいから, K_p の位相は上に定義した距離関数 d で導かれている. 一方で $q \notin K_p$ に対しては $f_{\lambda_0}(q)=0$ より $d(q,p) \geq |f_{\lambda_0}(p)-f_{\lambda_0}(q)|=f_{\lambda_0}(p)$. よって M の位相による p の近傍と, 距離 d による p の近傍とは一致している. p は M の任意の点であったから, 結局 M の位相は距離関数 d が定める位相と等しい. □

この例からもわかるように 1 の分割は, 局所的に与えられた情報をつなぎ合わせて全体としての情報を得るための道具である. 一般の位相空間が対象である場合には, 定理 4.19 で存在が保証された 1 の分割で十分であるが, 関数解析, 多様体論などで微分可能性が問題となる場合には, 1 の分割を可微分関数で構成することが必要となる. ユークリッド空間の閉部分集合とその開被覆に対して, このような 1 の分割を構成するには, 任意の開集合 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ に対し, なめらかな関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ であって各 $x \in \boldsymbol{R}^n$ について $f(x) \geq 0$ かつ $U=\{x;\ f(x)>0\}$

を満たすものが存在することを利用すればよい (参照 第6章章末問題7, p.218).

<まとめ> 局所コンパクト空間, パラコンパクト空間の定義, 局所コンパクトハウスドルフ空間が完全正則であってベールの第二類の集合であること, またパラコンパクトハウスドルフ空間が正規であって任意の開被覆に従属する 1 の分割が存在することを述べた. 多様体が双方の条件を満たす空間の典型例であるが, 1 の分割は多様体上の解析にとって不可欠の道具である.

[例題] Ω をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合, $\varphi:\Omega\to\Omega$ を同相写像とする. 点 $x\in\Omega$ が φ に関して**回帰的**であるとは, $n_i\to\infty$ なる自然数列で $\varphi^{n_i}(x)\to x$ を満たすものが存在するときをいう. 回帰的な点の全体を $\mathcal{R}(\varphi)$ で表し, これを φ の**回帰集合**と呼ぶ. Ω の体積が有限で, かつ φ が体積を保つ, すなわち部分集合 $A\subset\Omega$ に対して $\mathrm{vol}(\varphi(A))=\mathrm{vol}(A)$ が成り立つとき, 回帰集合 $\mathcal{R}(\varphi)$ は第二類の集合であり, 特に Ω で稠密である (**ポアンカレの回帰定理**). これを証明せよ.

(解) $\varepsilon>0$ に対して $d(\varphi^n(x),x)<\varepsilon$ を満たす $n\geq 1$ が存在するような点 $x\in\Omega$ の全体を O_ε とおく. この O_ε は開集合であり, 回帰集合 $\mathcal{R}(\varphi)$ は可算共通部分 $\bigcap O_{1/n}$ と一致するから, 各 O_ε が稠密であることを示せばよい. U を $\mathrm{diam}U<\varepsilon$ を満たす任意の開集合とする. 条件より $\mathrm{vol}(\Omega)<\infty$, 一方 $\mathrm{vol}(U)=\mathrm{vol}(\varphi(U))=\cdots>0$ であるから, 適当な $n\neq m$ をとれば $\varphi^n(U)\cap\varphi^m(U)\neq\emptyset$ が成り立つ. n, mの小さい方をmとすれば, $U\cap\varphi^{-(n-m)}(U)\neq\emptyset$ であり, この共通部分に属する点 x は, $\mathrm{diam}U<\varepsilon$ より $d(x,\varphi^{n-m}(x))<\varepsilon$ を満たす. したがって $x\in O_\varepsilon$, 特に $O_\varepsilon\cap U\neq\emptyset$ である. 開集合 U は条件 $\mathrm{diam}U<\varepsilon$ 以外は任意であったから, これは O_ε が稠密であることを導く. ■

4.3* 位相空間のコンパクト化

位相空間を適当なコンパクト位相空間の部分集合として実現することをコンパクト化と呼ぶ. これによって空間あるいはその上の連続写像などの性質をコンパクト空間に対して成立する事実を利用して調べることができるようになる.

ポアンカレ: Henri Poincaré, 1854-1912.

4.3.1 コンパクト化の例

位相空間 X に対して, コンパクト空間 $\widehat{X}$ と X から $\widehat{X}$ への埋め込み $\iota: X\to\widehat{X}$ の対 $(\widehat{X},\iota)$ で, ι による X の像 $\iota(X)$ が $\widehat{X}$ で稠密となるものが X の**コンパクト化**である. しかし, 通常は空間 $\widehat{X}$ 自身をコンパクト化と呼ぶことが多い. コンパクト空間の閉部分集合はまたコンパクトであったから, 稠密性の条件は写像の値域を閉包 $\overline{\iota(X)}$ で置き換えることで常に満たされる. 特に値域 $\widehat{X}$ がハウスドルフであるとき, これを**ハウスドルフコンパクト化**と呼ぶ. 我々が興味をもつのはおもにハウスドルフコンパクト化である.

■ 例 4.25 ■ 拡張された実数空間

実数空間 $\boldsymbol{R}$ は有限開区間 (a,b) と同相である. この開区間の閉包である閉区間 $[a,b]$ はコンパクトであるから, 両端点に対応する $\pm\infty$ を $\boldsymbol{R}$ につけ加えた $[-\infty,\infty]=\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ は実数空間の一つのコンパクト化となる. この $[-\infty,\infty]$ を**拡張された実数空間**と呼ぶ. 数列 $\{a_n\}$ が無限大に発散する, すなわち任意の $K\in\boldsymbol{R}$ に対して自然数 N が存在して $n\geq N$ のとき $a_n\geq K$ となることは, $\boldsymbol{R}$ を $[-\infty,\infty]$ の部分空間と見なしたとき, $\{a_n\}$ が $\infty\in[-\infty,\infty]$ に収束することと同値である. この意味で $a_n\to\pm\infty$ などの表記は整合性をもつ. □

■ 例 4.26 ■ リーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$　(参照 例 2.26, p.93)

リーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ に一点 ∞ を加えた空間で, $\boldsymbol{C}$ はその中で稠密である. さらに $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は2次元球面と同相であるからコンパクト. したがってリーマン球面は複素平面のコンパクト化の一つである. これは $\boldsymbol{C}$ の複素解析的構造を保つ唯一のコンパクト化として特に重要なものである. □

■ 例 4.27 ■ 射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$　(参照 例 2.21, p.88)

n 次元射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の, 同値関係 $x\sim\lambda x$, $\lambda\neq 0$ による商空間として定義された. いま n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ を写像 $j:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}$, $j(x_1,\cdots,x_n)=(1,x_1,\cdots,x_n)$ によって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の超平面 $\{1\}\times\boldsymbol{R}^n$ と同一視する (図 4.17). 商写像 $q:\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\boldsymbol{R}P^n$ と j の合成写像 $q\circ j$ は連続な単射で, また開集合 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して, その錐 $cE=\{ax;\ a>0, x\in E\}$ が $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の開集合であることから開写像でもある. したがって $q\circ j$ は中への同相写像となる. また $q\circ j$ の像の補集合は x_0-軸から原点を除いた $\{(x_0,0,\cdots,0); x_0\neq 0\}$ の商写像

q による像であるが, この集合が内部をもたないことから, $q\circ j$ の像は $\boldsymbol{R}P^n$ で稠密である. したがって $q\circ j:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}P^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト化を与える.

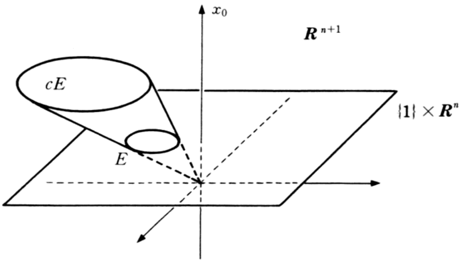


図 4.17

このコンパクト化の一つの利点は, 多項式関数 $p:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ を, おのおののコンパクト化である $\boldsymbol{R}P^n$ から $\boldsymbol{R}P^1$ への連続写像に拡張できることにある. 多項式 $p(x)$ は, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対する記号 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ を用いて $p(x)=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ と表される. このとき p の次数, すなわち $a_\alpha\neq 0$ なる α についての $|\alpha|=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$ の最大値を m と書くと, 多項式 p は超平面 $\{1\}\times\boldsymbol{R}^n$ 上では同次多項式 $\bar{p}(x_0,x)=\sum_\alpha a_\alpha x_0^{m-|\alpha|}x^\alpha$ と値が一致する. したがって写像 $\hat{p}:\boldsymbol{R}P^n\to\boldsymbol{R}P^1$ を, 同時座標を用いて $(x_0,x)\mapsto(x_0^m,\bar{p}(x_0,x))$ と定義すれば, これは多項式関数 $p:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ の連続な拡張となっている. □

■ 例 4.28 ■ 上半平面 H のコンパクト化

上半平面 $H=\{z=x+y\sqrt{-1}\in\boldsymbol{C};y>0\}\subset\boldsymbol{C}$ は有界ではないから複素平面での閉包はコンパクトではないが, リーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ の部分集合と見たときの閉包 $\overline{H}=\{z=x+y\sqrt{-1}\in\boldsymbol{C};y\geq 0\}\cup\{\infty\}$ はコンパクトであり, H のコンパクト化の一つとなっている. このコンパクト化の利点は, 上半平面 H の等長変換である一次分数変換 $\varphi:H\to H$ が自然に $\overline{H}$ に拡張することにある. 虚軸に関する鏡映も $\overline{H}$ から $\overline{H}$ への写像に拡張するから, 上半平面 H のすべての等長写像が $\overline{H}$ から自分自身への同相写像に拡張する. またこのコンパクト化は上半平面 H の "中" から次のように定義することもできる. 一点 $z_0\in H$ を固定する. 上半平面の測地線が実軸に直交する円で与えられることから, 任意の $z\neq z_0$ は z_0 と唯一の測地線で結ぶことができる. z_0 を端点とする測地線 $\gamma:[0,\infty)\to H$, $\gamma(0)=z_0$ は方向, すなわちベクトル $\gamma'(0)$ で決まるから, その全体を自然に S^1

と同一視することができる．測地線は弧長でパラメトライズされていることに注意しよう．$\theta \in S^1$ に対応する測地線を $\gamma_\theta : [0,\infty) \to H$ と書くとき，通常の極座標と同様に，写像 $\varphi : S^1 \times [0,\infty) \to H$ を $\varphi(\theta,t) = \gamma_\theta(t)$ で定義すると，φ は同相写像 $\bar{\varphi} : S^1 \times [0,\infty)/S^1 \times \{0\} \to H$ を導く (図 4.18)．ここで半開区間 $[0,\infty)$ をそのコンパクト化である閉区間 $[0,\infty]$ で置き換えれば，商空間 $S^1 \times [0,\infty]/S^1 \times \{0\}$ は 2 次元円板 D^2 と同相な空間となり，逆写像 $\bar{\varphi}^{-1} : H \to S^1 \times [0,\infty]/S^1 \times \{0\}$ が上半平面 H のハウスドルフコンパクト化を与える．このコンパクト化が上で述べた $\overline{H}$ と等しいことは容易に確かめられるであろう．

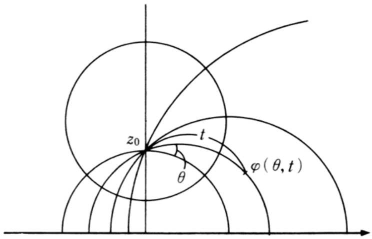


図 4.18　□

4.3.2　一点コンパクト化

ハウスドルフ空間 X がコンパクトでないとき，その**一点コンパクト化**あるいは**アレクサンドロフのコンパクト化**を以下で定義する．全空間として X に一点をつけ加えた空間をとる．追加した一点は習慣上 ∞ で表す．すなわち全空間は $X \cup \{\infty\}$ であり，その開集合系 $\mathfrak{O}$ を X の開集合系 $\mathfrak{O}_X$ を用いて，次のいずれかを満たす部分集合 $E \subset X \cup \{\infty\}$ の全体として定義する．

(i)　$E \subset X$ かつ $E \in \mathfrak{O}_X$.

(ii)　$\infty \in E$ かつ $X \setminus E$ がコンパクト.

集合族 $\mathfrak{O}$ が開集合の公理を満たすことを確かめよう．条件 (ii) を満たす集合 E に対して $E \cap X = X \setminus (X \setminus E)$ が成り立つから，X のハウスドルフ性によって，この場合も $E \cap X$ は X の開集合であることに注意する．まず空集合は条件 (i)

アレクサンドロフ: Pavel Sergeevich Aleksandrov(=Alexandroff), 1896-1982.

を満たし, 全体集合 $X\cup\{\infty\}$ は条件 (ii) を満たすから $\emptyset, X\cup\{\infty\}\in\mathfrak{O}$ である. 次に二つの開集合 $E_1, E_2\in\mathfrak{O}$ をとる. もし E_1, E_2 のいずれか, 例えば E_1 が条件 (i) を満たすならば $E_1\cap E_2=E_1\cap(E_2\cap X)\in\mathfrak{O}_X$ より $E_1\cap E_2$ は条件 (i) を満たす. E_1, E_2 がともに条件 (ii) を満たすならば $\infty\in E_1\cap E_2$ であり, また $X\setminus(E_1\cap E_2)=(X\setminus E_1)\cup(X\setminus E_2)$ は二つのコンパクト集合の和であるからコンパクト. したがって共通部分 $E_1\cap E_2$ も条件 (ii) を満たす. 最後に開集合の族 $E_\lambda\in\mathfrak{O}$ に対し, すべての E_λ が条件 (i) を満たすならば, 和 $\bigcup E_\lambda$ は X の開集合であるから条件 (i) を満たす. 逆に適当な添数 $\lambda=\lambda_0$ に対して E_{λ_0} が ∞ を含むならば, 和 $\bigcup E_\lambda$ も ∞ を含み, また $X\setminus\bigcup E_\lambda=(X\setminus E_{\lambda_0})\cap\bigcap(X\setminus E_\lambda)$ はコンパクト集合の閉部分集合であるからまたコンパクトである. したがって和 $\bigcup E_\lambda$ は条件 (ii) を満たす. 以上で $\mathfrak{O}$ が開集合の公理を満たすことが示された.

次にもとの空間 X から $X\cup\{\infty\}$ への包含写像 $\iota: X\to X\cup\{\infty\}$ が中への同相写像であることを示す. 連続性は開集合 $E\subset X\cup\{\infty\}$ に対して $\iota^{-1}(E)=X\setminus E\in\mathfrak{O}_X$ であることからわかる. また $O\subset X$ をもとの位相に関する開集合とするとき, $\iota(O)\subset X\cup\{\infty\}$ は条件 (i) を満たすから $X\cup\{\infty\}$ の開集合で, したがって $\iota: X\to X\cup\{\infty\}$ は中への同相写像である. 以降 X の元と ι によるその像を同一視して $X\subset X\cup\{\infty\}$ とみなす. さて任意の空でない開集合 $E\subset X\cup\{\infty\}$ をとったとき, E が条件 (i) を満たす場合には明らかに $E\cap X\neq\emptyset$ であり, また E が条件 (ii) を満たす場合には X がコンパクトでないことより, やはり $E\cap X\neq\emptyset$ である. これより $X\subset X\cup\{\infty\}$ は稠密な部分集合である. 最後に位相空間 $X\cup\{\infty\}$ がコンパクトであることを確かめる. 任意の開被覆 $\mathfrak{V}$ に対し, 点 $\infty\in X\cup\{\infty\}$ を含む開集合 $V\in\mathfrak{V}$ をとれば, V は条件 (ii) を満たすから $X\setminus V$ はもとの位相に関してコンパクトである. したがって開集合族 $\mathfrak{V}$ を $X\setminus V$ の被覆とみなせば, 有限部分被覆 $\mathfrak{V}'$ が存在するが, この $\mathfrak{V}'$ に V をつけ加えた $\mathfrak{V}'\cup\{V\}$ は $X\cup\{\infty\}$ の有限被覆となっている.

以上が空間 X の一点コンパクト化であるが, 開集合系 $\mathfrak{O}$ は $X\cup\{\infty\}$ が X のコンパクト化となるような位相のうちで最も強いものである. 一般の空間に対してはこの定義を採用する必然性はないが, X が局所コンパクトである場合, これは $X\cup\{\infty\}$ が X のハウスドルフコンパクト化となる唯一の位相である.

【定理 4.20（アレクサンドロフ）】　局所コンパクト空間 X に対してその一点コンパクト化 $X\cup\{\infty\}$ はハウスドルフ空間であり，また X の任意のハウスドルフコンパクト化 $\widehat{X}$ から $X\cup\{\infty\}$ への自然な連続写像が存在する．

証明　まず $X\cup\{\infty\}$ がハウスドルフであることをいう．X のハウスドルフ性より $X\cup\{\infty\}$ の ∞ 以外の異なる二点は開集合で分離される．よって $x\in X$ と ∞ を分離する開集合を見つければよい．X の局所コンパクト性より x はコンパクトな近傍 N をもつ．位相の定義より，N の補集合 $(X\setminus N)\cup\{\infty\}$ は ∞ を含む $X\cup\{\infty\}$ の開集合である．一方 N が x の近傍であることから，$x\in \mathring{N}$．したがって $\mathring{N}$ と $(X\setminus N)\cup\{\infty\}$ が，x と ∞ を分離する開集合となっている．

次に $\widehat{X}$ を X の任意のハウスドルフコンパクト化としよう．まず部分集合 $X\subset\widehat{X}$ が開集合であることを示す．各点 $p\in X$ に対して p の X でのコンパクトな近傍 N をとる．N は p の近傍であるから，p を含む $\widehat{X}$ の開集合 U で $X\cap U\subset N$ を満たすものが存在する．このとき $X=(X\setminus U)\cup N$ の $\widehat{X}$ での閉包をとると $\overline{(X\setminus U)}\cup\overline{N}=\overline{X}=\widehat{X}$ が成立するが，U が $\widehat{X}$ の開集合であることから $\overline{(X\setminus U)}\subset X\setminus U$．また N がコンパクトであることから $\overline{N}=N$．これは $U\subset N$，すなわち $N\subset X$ が $\widehat{X}$ においても p の近傍で，したがって X が $\widehat{X}$ の開部分集合であることを導く．さて自然な写像 $\varphi:\widehat{X}\to X\cup\{\infty\}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\in X \\ \infty, & x\notin X \end{cases}$ が連続であることを示せばよい．$U\subset X\cup\{\infty\}$ を開集合とする．もし $U\subset X$ ならば U は X の開部分集合であり，X が $\widehat{X}$ の開集合であることから，$\varphi^{-1}(U)=U$ は $\widehat{X}$ の開集合となる．もし $\infty\in U$ ならば $\widehat{X}\setminus\varphi^{-1}(U)=X\setminus U$ は X のコンパクトな部分集合で，したがって $\widehat{X}$ のハウスドルフ性より閉集合である．この場合も $\varphi^{-1}(U)$ は $\widehat{X}$ の開集合であるから，$\varphi:\widehat{X}\to X\cup\{\infty\}$ は連続写像である．　■

リーマン球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ の一点コンパクト化であり，中への同相写像は $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ を2次元球面と同一視すれば立体射影の逆写像として与えられた (例 2.26, p.93) これは次元の高いユークリッド空間の場合も同様である．

■ 例 4.29 ■ ユークリッド空間の一点コンパクト化

n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ を写像 $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n,0)$ によって $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間と見なす．n 次元球面 $S^n=\{(x_1,\cdots,x_n);\sum x_i^2=1\}$ の北極に当た

る点を $N=(0,\cdots,0,1)$ とし, 各 $p\in S^n\setminus\{N\}$ に対して, N と p を結ぶ直線と $\boldsymbol{R}^n$ との交点を対応させる写像, すなわち**立体射影**を $st:S^n\setminus\{N\}\to\boldsymbol{R}^n$, $(x_1,\cdots,x_{n+1})\mapsto\left(\dfrac{x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\dfrac{x_n}{1-x_{n+1}},0\right)$ とおく. リーマン球面の場合同様, st およびその逆写像 st^{-1} は連続であり, したがって $st^{-1}:\boldsymbol{R}^n\to S^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト化を与える. ここで球面 S^n において st^{-1} の像に含まれないのは北極 N 一点のみであるから, これは一点コンパクト化にほかならない. □

4.3.3 ストーン-チェックのコンパクト化

一点コンパクト化は, 局所コンパクト空間に対しては最小のハウスドルフコンパクト化であった. これに対してこの項では, 完全正則空間に対する最大のコンパクト化を考える.

位相空間 X から閉区間 $[0,1]$ への連続関数の全体を $\{f_\lambda:X\to[0,1];\lambda\in\Lambda\}$ とおき, X から立方体 $[0,1]^\Lambda$ への連続写像 $\iota:X\to[0,1]^\Lambda$ を $\iota(x)=(f_\lambda(x))_\lambda$ で定義する. 埋め込み定理 (p.118) によれば, 位相空間 X が完全正則であるとき, この写像 ι は中への同相写像となる. 一方, チコノフの定理 (p.136) によって立方体 $[0,1]^\Lambda$ はコンパクトであるから, X の像 $\iota(X)$ の $[0,1]^\Lambda$ での閉包 $\overline{\iota(X)}$ を $\beta(X)$ で表せばこれはコンパクトなハウスドルフ空間となる. また $\iota(X)$ は $\beta(X)$ で稠密であるから, $\iota:X\to\beta(X)$ は X のハウスドルフコンパクト化を与える. これを X の**ストーン-チェックのコンパクト化**と呼ぶ. このコンパクト化が最大であることをいうために, まず X 上の任意の有界連続関数が $\beta(X)$ に拡張することを示す. 有界な連続関数 $g:X\to\boldsymbol{R}$ に対し, 実数 $a<b$ を $g(X)\subset[a,b]$ が成り立つようにとる. このとき $g'(x)=\dfrac{1}{b-a}(g(x)-a)$ で与えられる g' は X から $[0,1]$ への連続関数であるから, $g'=f_\lambda$ なる $\lambda\in\Lambda$ が存在する. この $f_\lambda:X\to\boldsymbol{R}$ は埋め込み ι と立方体 $[0,1]^\Lambda$ から λ-成分への射影 pr_λ との合成 $\mathrm{pr}_\lambda\circ\iota$ と等しいから, コンパクト化 $\beta(X)$ 上の連続関数 pr_λ に拡張する. したがってもとの関数 g も $(b-a)\mathrm{pr}_\lambda+a$ に拡張する. 次に $\iota:X\subset\widehat{X}$ を任意のハウスドルフコンパクト化とする. $\widehat{X}$ はコンパクトハウスドルフ空間で, 正規したがって完全正則であるから (定理 4.13, p.142), 適当な添数集合 $\widehat{\Lambda}$ をとることによって, 立方

ストーン: Marshall Harvey Stone, 1903-1989.
チェック: Eduard Čech, 1893-1960.

体 $[0,1]^{\widehat{\Lambda}}$ の中へ埋め込むことができる (埋め込み定理, p.118). この埋め込みを $j:\widehat{X}\to[0,1]^{\widehat{\Lambda}}$ とおく. 添数 $\hat{\lambda}\in\widehat{\Lambda}$ に対して, 合成写像 $\mathrm{pr}_{\hat{\lambda}}\circ j\circ\iota : X\to[0,1]$ は連続であり, $\beta(X)$ 上の連続関数 $\psi_{\hat{\lambda}}:\beta(X)\to[0,1]$ に拡張する. この写像の族は $\Psi:\beta(X)\to[0,1]^{\widehat{\Lambda}}$ を定義するが, Ψ の像はコンパクト集合であるから閉集合で, したがって $j(X)$ の閉包 $j(\widehat{X})$ と一致する. そうすると j の逆写像 j^{-1} と Ψ との合成 $j^{-1}\circ\Psi:\beta(X)\to\widehat{X}$ は恒等写像 id_X を拡張する連続写像となる. 以上より次の定理が得られた. ただし一意性の主張は条件 (SC_3) による.

【定理 4.21（ストーン-チェック）】　完全正則な位相空間 X に対して以下の条件を満たすコンパクト化 $\beta(X)$ が一意的に存在する.

- (SC_1)　$\beta(X)$ はハウスドルフ空間.
- (SC_2)　任意の有界連続関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ は $\bar{f}:\beta(X)\to\boldsymbol{R}$ に拡張する.
- (SC_3)　X の任意のハウスドルフコンパクト化 $\widehat{X}$ に対して, 連続写像 $\varphi:\beta(X)\to\widehat{X}$ で X 上恒等写像であるものが一意的に存在する.

<まとめ>　与えられた位相空間のコンパクト化について述べた. 空間のコンパクト化は一意的ではなく, 目的によって最適のものを選んで使う必要がある. 最も一般的であるのは, 局所コンパクト空間に対する一点コンパクト化であり, その典型例が複素平面のコンパクト化としてのリーマン球面であろう.

[例題]　空間 $X=[0,1]\cap\boldsymbol{Q}$ のコンパクト化について以下を示せ.

(1) X に一点 $\{p\}$ をつけ加えた空間 $X\cup\{p\}$ に, これがコンパクトとなるような位相を入れる. 一点コンパクト化以外にもこのような位相はいくつかある. 単位閉区間 $[0,1]$ は X の一つのコンパクト化であるが, $[0,1]$ からこのような空間 $X\cup\{p\}$ への自然な写像は連続ではない. したがって X には最小のコンパクト化は存在しない.

(2) $\widehat{X}$ を X のハウスドルフコンパクト化とするとき, $\widehat{X}\setminus X$ は少なくとも二点以上を含む. これを $p_1,p_2\in\widehat{X}\setminus X$ とするとき, 商空間 $\widehat{X}/\sim$, $p_1\sim p_2$ は再び X のハウスドルフコンパクト化となる. したがって X には最小のハウスドルフコンパクト化も存在しない.

(解) (1) $A=\{x\in X;\ x\leq 1/3\}$ は X の閉部分集合であるが，コンパクトでないから $X\cup\{p\}$ の閉集合ではない．したがって A の $X\cup\{p\}$ での閉包は $A\cup\{p\}$ となり，特に $A\cup\{p\}$ は閉集合である．同様に $B=\{x\in X;\ x\geq 2/3\}$ に対して $B\cup\{p\}$ も閉集合．これより $\{p\}=(A\cup\{p\})\cap(B\cup\{p\})$ は $X\cup\{p\}$ の閉集合であるが，自然な写像 $[0,1]\to X\cup\{\infty\}$ によるその逆像 $[0,1]\backslash \boldsymbol{Q}$ は閉集合ではない．

(2) $\widehat{X}\backslash X$ が一点 p からなる集合であったとする．$\widehat{X}$ がコンパクトかつハウスドルフであれば，各点 $x\in X\subset\widehat{X}$ はコンパクト集合よりなる基本近傍系をもつが，X は局所コンパクトではないから，このような近傍は常に p を含む．これは $\widehat{X}$ のハウスドルフ性に反する．次に $p_1,p_2\in\widehat{X}\backslash X$, $p_1\neq p_2$ に対して，題意のように $\widehat{X}/\!\sim$ を定義する．このとき $\widehat{X}/\!\sim$ が X のコンパクト化を与えることは容易にわかるから，ハウスドルフ性を満たすことを示せばよい．異なる二点 $q,q'\in\widehat{X}$ をとる．q, q' のいずれもが p_1 あるいは p_2 でない場合．$\widehat{X}$ において q, q' を分離する近傍を $q\in U$, $q'\in V$, $U\cap V=\emptyset$ とするとき，$U\backslash\{p_1,p_2\}$, $V\backslash\{p_1,p_2\}$ が $\widehat{X}/\!\sim$ において q, q' を分離する近傍となる．$q=p_1$, $q'\neq p_1,p_2$ の場合．p_1 と q' を分離する近傍を $p_1\in U_1$, $q'\in V_1$, $U_1\cap V_1=\emptyset$, p_2 と q' を分離する近傍を $p_2\in U_2$, $q'\in V_2$, $U_2\cap V_2=\emptyset$ とするとき，$q\in U_1\cup U_2$ と $q'\in V_1\cap V_2$ とが $\widehat{X}/\!\sim$ において q, q' を分離する近傍を与える．■

章　末　問　題

1. X を距離空間とする．部分集合 A の ε-近傍 が $U(A;\varepsilon)=\{x\in X;\ \bar{d}(x,A)<\varepsilon\}$ で，二つの部分集合 A, B の距離が $\bar{d}(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B} d(x,y)$ で定義されている (第 3 章章末問題 1, p.121)．このとき以下を示せ．

(1) A がコンパクトで U が A を含む開集合であるならば，適当な正数 ε をとって $U(A;\varepsilon)\subset U$ とできる．

(2) もし A, B がともにコンパクトであれば，$\bar{d}(A,B)=0$ と $A\cap B\neq\emptyset$ とは同値である．

2. 周の長さが一定の四角形のうちで面積が最大のものは正方形であることを示せ．

3. n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ に有限個の点 $p_1,\cdots,p_N$ が与えられているとする．$k<n$ なる自然数 k を決めたとき，$\boldsymbol{R}^n$ の k 次元線形部分空間 H に対して，H と点 p_ℓ との距離の和を $f(H)$ とおく．すなわち $f(H)=\sum_\ell \bar{d}(p_\ell,H)$．このとき $f(H)$ の値を最小とするような部分空間 H_0 が存在することを示せ．

4. 3 次元ユークリッド空間内の曲面 $F=\{(x,y,z);\ x^4+y^4+z^4=1\}$ は S^2 と同相であることを示せ.

5. 空でないコンパクト空間上の任意の上半連続関数は最大値をとることを示せ.

6. 任意のコンパクト距離空間 X に対して, カントール集合 C から X への連続な全射が存在することを示せ.

7. 位相空間 X から自分自身への連続写像 $\varphi : X \to X$ に対して, X の可算直積 $X^{\boldsymbol{Z}}=\{x=(x_i)_{i\in Z};\ x_i \in X\}$ の部分集合 $\Sigma_\varphi=\{x;\ \varphi(x_{i+1})=x_i\}$ を考える. X がコンパクトであれば Σ_φ は空ではないこと, さらに φ が全射であれば第 0 成分への射影 $\mathrm{pr}_0 : \Sigma_\varphi \to X$ が全射となることを示せ.

8. 位相空間 X が**リンデレーフ空間**であるとは, X の任意の開被覆 $\mathfrak{V}$ が高々可算な部分被覆をもつときをいう. 距離空間 X に対しては, X がリンデレーフ空間であることと X が第二可算公理を満たすことが同値であることを示せ.

9. 距離空間 X が第二可算公理を満たすとき, X 上の任意の連続関数が最大値をとれば X はコンパクトとなる. これを証明せよ.

10. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の空でないコンパクト部分集合の全体 $\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)$ のハウスドルフ距離 d_H に関して以下の関数は連続であるか.

(1) $K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)$ に直径 $\mathrm{diam}K$ を対応させる関数 $\mathrm{diam} : \mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$.

(2) $K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)$ に体積 $\mathrm{vol}(K)$ を対応させる関数 $\mathrm{vol} : \mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$.

(3) 連続関数 $f : \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ が与えられたとき, $K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)$ に K 上での f の最大値 $m_f(K)=\max_{x\in K} f(x)$ を対応させる関数 $m_f : \mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$.

11. 連続関数の空間 $C[0,1]$ においては, 定数関数 0 の任意の近傍はコンパクトではない. これを収束部分列をもたない関数列を具体的に与えることによって示せ.

12. 次の二条件を満たす三角形 $\triangle ABC$ が存在することを示せ.

(i) 辺の長さの比 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}}, \dfrac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$ はすべて無理数.

(ii) 角 $\angle A, \angle B, \angle C$ と π との比はすべて無理数.

13. X をパラコンパクトハウスドルフ空間, $g_\lambda : X\to\boldsymbol{R}$, $\lambda\in\Lambda$ を X 上定義された連続関数の族であって, 任意の点 $p\in X$ に対して $g_\lambda(p)>0$ なる $\lambda\in\Lambda$ をとることができるものとする. このとき連続関数 $g : X\to\boldsymbol{R}$ であって, すべての $x\in\boldsymbol{R}$ において $0<g(x)<\sup_\lambda g_\lambda(x)$ を満たすものが存在することを示せ.

リンデレーフ: Ernst Lindelöf, 1870-1946.

5

連結性と単連結性

この章では空間の位相不変性の一例である連結性と単連結性について述べる. 最初の5.1節の題材である連結性は初等的な概念であるが, 中間値の定理を導き, また空間の識別に有効であるなど応用は広い. 常識的な空間に対しては, これは任意の二点を結ぶ曲線の存在をいう弧状連結性と同値であり, この形で使われることも多い. 次の5.2節で扱う単連結性は, 集合と位相の通常の教程には含まれないけれども, 関数論などで多少は馴染みがあろうから, あえて取り上げることとした. この節は飛ばしても差し支えない.

5.1 連結性

連結性は空間がつながっていることを表現する概念であるが, その定義は空間が二つの部分空間の直和 (p.84) として表しえないこととして与えられる.

5.1.1 連結空間

位相空間 X が二つの部分空間 A, B の, 位相空間としての直和として表されているとき, A 自身は部分空間 A の開集合であり, B 自身も B の開集合であるから, A, B はともに X の開集合となる. 逆に X が共通部分をもたない二つの開集合 A, B の和として書けるとき, X の開集合 O に対して $O \cap A$, $O \cap B$ はともに開集合であるから, X は自然に A と B との直和に等しい. 与えられた位相空間がこの意味で二つの部分集合に分解できるとき, この空間を**非連結**という (図 5.1). 逆に空でない二つの部分空間の直和として表すことができないような位相

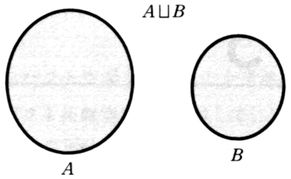


図 5.1　非連結空間

空間を**連結**と呼ぶ. 言い換えれば空間 X が連結とは, 二つの空でない開集合 O_1, O_2 であって, $X=O_1 \cup O_2$ かつ $O_1 \cap O_2=\emptyset$ を満足するものが存在しないことである. この条件は X の開かつ閉なる部分集合が空集合と自分自身のみであることと同値である. また X の部分集合 A が**連結**であるとは相対位相に関して A が連結空間であるときをいう.

空間の連結性は, 以下で述べるように, その上の関数を用いて記述することができる. 位相空間 X 上の関数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ が**定値関数**であるとは X 上常に一定値をとるときをいう. **定値写像**も同じく定義される. また X 上の関数あるいは写像 φ が**局所定値**であるとは, 任意の $x \in X$ に対して適当な近傍 $x \in U_x$ が存在して, この近傍 U_x 上へ制限した $\varphi|_{U_x}$ が定値であるときをいう.

【命題 5.1】　連結な位相空間上の局所定値写像は定値写像である.

証明　X を空でない連結な位相空間, $\varphi: X \to Y$ を局所定値写像とする. 像 $\varphi(X)$ から一点 y_0 をとり逆像 $\varphi^{-1}(y_0)$ を考えると, φ が局所定値であったから $\varphi^{-1}(y_0)$ は開集合である. 同じく任意の $y \in Y$ に対して $\varphi^{-1}(y)$ は開集合であるから和 $\bigcup_{y \neq y_0} \varphi^{-1}(y)$ も開集合で, X はこれら二つの部分空間の直和となる. したがって X の連結性より二つの開集合のどちらかは空集合であるが, $y_0 \in \varphi(X)$ であったから $\bigcup_{y \neq y_0} \varphi^{-1}(y)=\emptyset$. これより φ は X 上一定値 y_0 をとる. ■

【系 5.2】　位相空間 X が連結であるのは X から二点よりなる空間 $\{0,1\}$ への連続写像が定値写像のみであるとき, そのときに限る. ただし $\{0,1\}$ には離散位相がはいっているものとする.

証明　離散空間 $\{0,1\}$ への連続写像は常に局所定値となるから, 命題 5.1 によっ

て X が連結ならば, そのような写像は定値写像に限られる. 逆に X が連結でないと仮定すれば, 空でない開部分集合 O, O' であって $O \cap O' = \emptyset$ かつ $X = O \cup O'$ なるものが存在する. このとき写像 $\varphi : X \to \{0,1\}$ を $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \in O' \end{cases}$ で定義すれば, この φ は連続であり, しかも定値写像ではない. ■

【系 5.3】 位相空間の部分集合 A が連結であれば, $A \subset B \subset \overline{A}$ を満たす任意の部分集合 B は連結. 特に A の閉包 $\overline{A}$ は連結である.

証明　$\varphi : B \to \{0,1\}$ を連続写像とすると, A の連結性より φ は A 上一定値であるが, A が B で稠密であったから B 上でも一定値をとる. ■

これに反して連結部分空間の内部は必ずしも連結ではない. 次の項の例 5.4 (p.170) が反例を与える. 次に実数空間の連結部分集合を決定しよう.

【定理 5.4】 実数空間 $\boldsymbol{R}$ の部分集合が連結となるのはそれが区間であるとき, そのときに限る. 特に実数空間 $\boldsymbol{R}$ は連結である.

証明　A を $\boldsymbol{R}$ の連結な部分集合とし, $x, y \in A$, $x < y$ と仮定する. もし $x < z < y$ であって $z \notin A$ なる z があれば, 写像 $\varphi : A \to \{0,1\}$ を $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < z \\ 1, & t > z \end{cases}$ と定義することによって A から $\{0,1\}$ への定値でない連続写像が存在して矛盾が生じる. これより $a = \inf A$, $b = \sup A$ とおくとき, $a \in A$, $a \notin A$ および $b \in A$, $b \notin A$ に従って $A = [a,b]$, $A = [a,b)$, $A = (a,b]$, $A = (a,b)$ のいずれかが成り立つ. 逆に A を区間, 例えば $A = [a,b]$ とする. このとき任意の連続写像 $\varphi : A \to \{0,1\}$ が定値であることをいえばよい. いま $\varphi(a) = 0$ と仮定し $\lambda = \sup\{x; [a,x] \subset \varphi^{-1}(0)\}$ とおくと, φ の連続性より $\varphi(\lambda) = 0$. ここで $\lambda < b$ であったとしよう. 再び φ の連続性より, 適当な $\varepsilon > 0$ をとれば 任意の $x \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ に対して $\varphi(x) = 0$ であり, 一方 λ の定義より $[a, \lambda - \varepsilon] \subset \varphi^{-1}(0)$ であるから $[a, \lambda + \varepsilon] \subset \varphi^{-1}(0)$. これは λ が上限であることに反する. したがって $\lambda = b$ であり φ は $A = [a,b]$ 上一定値 0 をとる. すなわち閉区間は連結である. 開区間, 半開区間についてもまった

く同じ議論が通用する. ■

■ 例 5.1 ■ 区間の識別

開区間から任意の一点を除けばその結果は必ず非連結となる. しかしながら半開区間あるいは閉区間においては, それに含まれる端点を除いても残りはまだ区間であり連結. したがって開区間と半開区間あるいは閉区間とは同相でない. また閉区間からは両端点を除いてもまだ連結であるが, 半開区間から二点を除けばもはや連結ではない. したがって半開区間と閉区間も同相ではない. □

■ 例 5.2 ■ S^1 の連結性

円周 S^1 から一点 x_0 を除いた空間 $S^1\setminus\{x_0\}$ は実数の開区間と同相であるから連結. したがってその閉包である S^1 自身も連結である. □

5.1.2　連結性の遺伝

一般に位相的性質が与えられたとき, 空間がこの性質をもつか否かを判定することは重要であろう. 連結性については, 空間が連結でないことを示すには, 自明でない分割を見つければよい. これに対し, 連結であることをいうには, そのような分割が不可能であることを示さなければならない. 後者は証明問題であり, それには個々の空間の性質が反映するとはいえ, 共有できる議論も含まれている. それを整理し, 一般にどのような状況下であれば空間の連結性が導かれるかについて記述する. 最初に扱う連結不変性の定理は区間上の実数値連続関数についての中間値の定理の一般化を導く.

【定理 5.5 (連結不変性)】　連結位相空間の連続写像による像はまた連結である.

証明　X を連結位相空間, $\varphi : X \to Y$ を連続写像とする. その像 $\varphi(X)$ から $\{0,1\}$ への連続写像を ψ とすれば, X の連結性より合成写像 $\psi\circ\varphi$ は定値写像であり, したがって ψ 自身も定値写像でなければならない. ■

特に連結な位相空間の商空間は連結である.

【系 5.6 (中間値の定理)】 X を連結な位相空間, $f: X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする. X の二点 x, y での関数値 $f(x)$, $f(y)$ が異なれば, α をその間にある任意の実数とするとき X の点 z で $f(z)=\alpha$ を満たすものが存在する.

証明　連結不変性より f による X の像 $f(X) \subset \boldsymbol{R}$ は連結であり, したがって区間となる. この区間は $f(x)$ と $f(y)$ とを含むから, その間にある α をも含む. ■

次に連結空間の和および積の連結性について述べる.

【定理 5.7】 X を位相空間, A_λ をその連結部分集合の族とする. このとき任意の A_λ と $A_{\lambda'}$ とが交われば, 和集合 $\bigcup_\lambda A_\lambda$ も連結となる.

証明　和集合 $A=\bigcup_\lambda A_\lambda$ から $\{0,1\}$ への連続写像 φ を考える. まず一つの添数 λ_0 に対し, A_{λ_0} が連結なることから φ は A_{λ_0} 上定値である. この値を仮に 0 とする. 次に任意の添数 λ をとれば, A_λ が A_{λ_0} と交わることから, φ は A_λ 上のどこかで値 0 をとる (図 5.2). そうすると連結性から φ は A_λ 上常に値 0 をとり, したがって $A=\bigcup_\lambda A_\lambda$ 上 φ は定値 0 をとる.

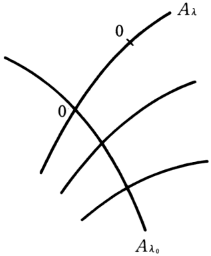


図 5.2 ■

■ 例 5.3 ■　球面 S^n の連結性

2 次元球面 S^2 は大円の和として表されるが, 大円は S^1 と同相であるから連結であり, また任意の二つの大円は二点で交わるから球面 S^2 も連結となる. 3 次元以上の球面についても同様である. □

■ 例 5.4 ■　自分自身は連結であるが内部は連結でない部分集合

平面 $\boldsymbol{R}^2$ において $A=\{(x,y);\ x^2\leq y^2\}$ で与えられる部分空間を考えると (図 5.3), これは原点 (0,0) を通る直線 $x=\lambda y$, $-1\leq\lambda\leq 1$ の和集合であるから連結である. 一方で A の内部 $\mathring{A}=\{(x,y);\ x^2<y^2\}$ は $\{(x,y);\ -y<x<y, y>0\}$ と $\{(x,y);\ y<x<-y, y<0\}$ との直和であるから連結ではない.

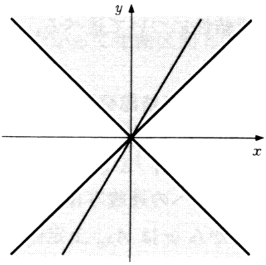


図 5.3　□

【定理 5.8】　空でない位相空間 X_λ の直積空間 $\prod_\lambda X_\lambda$ が連結となるのは各 X_λ が連結となるとき, そのときに限る.

証明　まず直積 $\prod_\lambda X_\lambda$ が連結であると仮定する. 選択公理より射影 $\mathrm{pr}_\lambda:\prod_\lambda X_\lambda\to X_\lambda$ が全射であるから (系 A.7, p.228), 連結不変性の定理より, その像 $X_\lambda=\mathrm{pr}_\lambda(\prod_\lambda X_\lambda)$ は連結である.

逆に各 X_λ が連結なるとき直積 $\prod_\lambda X_\lambda$ が連結であることを示す. 最初に二つの連結空間の直積 $X\times Y$ を扱う. $x_0\in X$ を固定し, $y\in Y$ に対して $A_y=\{x_0\}\times Y\cup X\times\{y\}$ とおくと, これは共有点 (x_0,y) をもつ二つの連結部分集合 $\{x_0\}\times Y$ と $X\times\{y\}$ との和であるから連結. また任意の A_y, $A_{y'}$ は $\{x_0\}\times Y$ を共有しているので, 和 $\bigcup_y A_y$ も連結となるが, この和は $X\times Y$ そのものである. よって連結空間二つの直積は連結であるが, これから数学的帰納法によって, 連結空間の有限直積空間が連結であることがわかる. 次に一般の直積空間 $\prod_\lambda X_\lambda$ の連結性を調べよう. 一点 $\check{x}=(\check{x}_\lambda)\in\prod_\lambda X_\lambda$ を固定すると, 有限直積は連結であったから, 任意の $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ に対して

$$\check{X}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_k}=X_{\lambda_1}\times\cdots\times X_{\lambda_k}\times\{(\check{x}_\lambda)_{\lambda\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_k}\}$$

は連結部分集合で, 一点 $\check{x}$ を共有している. したがってこの部分集合すべての和

$$\check{X} = \bigcup_{\lambda_1,\cdots,\lambda_k} \check{X}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_k}$$

もまた連結である. 一方, 直積空間の位相は

$$O_{\lambda_1} \times \cdots \times O_{\lambda_k} \times \left(\prod_{\lambda \neq \lambda_1,\cdots,\lambda_k} X_\lambda \right)$$

の全体をその基とするものとして定義されたから, $\check{X}$ は $\prod_\lambda X_\lambda$ で稠密. したがって $\check{X}$ の閉包である $\prod_\lambda X_\lambda$ 自身が連結となる. ■

■ 例 5.5 ■ ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の連結性

n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は実数空間の直積であるから連結である. □

■ 例 5.6 ■ 実数空間と 2 次元以上のユークリッド空間の識別

n 次元ユークリッド空間から原点を除いた $\boldsymbol{R}^n \backslash \{0\}$ は自然に $S^{n-1} \times (0, \infty)$ と同相であったから (例 1.28, p.31), $n \geq 2$ の場合にはこの空間は連結である. もし実数空間 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^n$ とが同相であれば, $\boldsymbol{R}^n \backslash \{0\}$ は $\boldsymbol{R}$ から原点 0 に対応する一点 p を除いた $\boldsymbol{R} \backslash \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, \infty)$ と同相であるが, 後者は連結ではないから矛盾が生じる. したがって 1 次元ユークリッド空間と 2 次元以上のユークリッド空間とは同相ではない. □

5.1.3 連結成分

X を位相空間, x をその点とし, x を含む X の部分集合で連結なるものを考える. このような部分集合は一般にたくさんあるけれども, それらはすべて共通の点 x を含んでいるので, 和集合はまた連結となる. したがってその中で包含関係に関して最大であるものが存在する. これを x の**連結成分**あるいは単に**成分**という. x の連結成分を C_x と書くとき, その閉包 $\overline{C_x}$ もまた連結であるから, C_x の最大性より $\overline{C_x}$ は C_x と一致する. すなわち連結成分は閉集合である. また位相空間 X の二点 x, y に対して, それらの連結成分 C_x, C_y が共通部分をもてば, 和 $C_x \cup C_y$ も連結となるから, 最大性によって $C_x = C_x \cup C_y = C_y$ である. よって位相空間において同じ連結成分に属するというのは同値関係となる. これより

空間は集合としては連結成分の直和 $\bigsqcup C_x$ と等しいが, 位相は必ずしも直和とは一致しない. 次に挙げるカントール集合がそのような例を与える.

■ 例 5.7 ■ カントール集合 C　(参照例 1.51, p.48)
カントール集合 $C\subset\boldsymbol{R}$ においては, 任意の点 $x\in C$ の左右いくらでも近くに C に属さない点が存在する. したがって x の連結成分は一点 x のみよりなる集合 $\{x\}$ である. これは有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$ も同じ. このように各点 $x\in X$ の連結成分が一点よりなる集合 $\{x\}$ であるとき, 空間 X を**完全不連結**という. □

位相空間 X がコンパクトでかつハウスドルフ性をもつならば, その点 $x\in X$ の連結成分 C_x は x を含む X の開かつ閉なる部分集合 A_λ すべての共通部分 $A=\bigcap A_\lambda$ と一致する. これを証明しよう. C_x が連結で x を含むことから, 各 λ について $C_x\subset A_\lambda$, したがって $C_x\subset A$ である. よって A が連結であることを示せば, $A\subset C_x$ より $A=C_x$ が得られる. まず A を含む任意の開集合 U に対し, 適当な λ_0 をとれば $A_{\lambda_0}\subset U$ となることをいう. 実際 $X\backslash U$ はコンパクトで, その閉部分集合の族 $A_\lambda\backslash U$ の共通部分が空集合であるから, 有限交叉性によって有限個の $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を選んで $\bigcap_i A_{\lambda_i}\backslash U=\emptyset$ とできる. 共通部分 $\bigcap_i A_{\lambda_i}$ は再び x を含む開かつ閉なる部分集合であるから, 改めて $A_{\lambda_0}=\bigcap_i A_{\lambda_i}$ とおけば, これが求める集合である. さて A が部分空間 B, B' の直和 $B\sqcup B'$ として表されたとしよう. B, B' は交わらないコンパクト部分集合であるから, $B\subset V$, $B'\subset V'$ かつ $V\cap V'=\emptyset$ なる開集合 V, V' が存在する. V, V' のうち x を含む方を仮に V とすれば, $U=V\cup V'$ に含まれるような A_{λ_0} に対して $A_{\lambda_0}\cap V=A_{\lambda_0}\backslash V'$ は x を含む開かつ閉なる X の部分集合で, 特に A はこの集合に含まれる. すなわち $A\cap V'=B'=\emptyset$ であり, A が連結であることが示された.

しかしコンパクトでない位相空間においてはこれは必ずしも正しくない. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 $X=\{(0,0),(1,0)\}\cup\{(x,y);\ 0\leq x\leq 1, y=1/n, n=1,2,\cdots\}$ を考える (図 5.4). X の部分集合 $X_m=\{(x,y)\in X;\ y\leq 1/m\}$ は開かつ閉である. 一方 X の開かつ閉なる集合 U が $(0,0)$ を含めば, 十分大なる n について $(0,1/n)\in U$ であり, 線分の連結性により $\{(x,1/n);\ 0\leq x\leq 1\}$ を含むから $X_n\subset U$ となる. したがってこのような集合 U すべての共通部分は $\bigcap X_m=\{(0,0),(0,1)\}$ と一致するがこれは連結ではない. この例で $\bigcap X_m$ が連結とならないのは, $0<t<1$ に対して点列 $\{(t,1/m)\}$ が X で収束しないことが原因である.

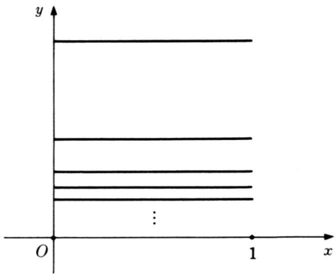


図 5.4

■ **例 5.8*** ■ **完全かつ完全不連結なコンパクト距離空間** (参照例 2.13, p.79)

孤立点を含まない位相空間, すなわちその各点が集積点であるような空間を完全と呼ぶのであった. コンパクトな距離空間 X が完全でかつ完全不連結であればカントール集合 $C\approx\{0,1\}^N$ と同相となる. これを証明しよう. 各点 $x\in X$ の連結成分が $\{x\}$ であることから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $U(x;\varepsilon/2)$ に含まれる開かつ閉なる部分集合で, x をその元とするものが存在する. これを A_x とおくと, その全体は X の開被覆をなすから有限部分被覆 $\{A_{x_1},\cdots,A_{x_n}\}$ が存在する. この族から $B_1=A_{x_1}$, $B_2=A_{x_2}\setminus B_1$, $B_3=A_{x_3}\setminus(B_1\cup B_2)$, $\cdots$ によって新しく有限集合族 $\{B_i\}$ を構成すると, 各 B_i は $\mathrm{diam}B_i<\varepsilon$ を満たす開かつ閉なる X の部分集合で, 直和分割 $X=\bigsqcup B_i$ が成立する (図 5.5). また B_i は再び完全かつ完全不連結であるから, これを二つの開かつ閉なる部分集合の直和 $B_i'\sqcup B_i''$ として表すことができる. これによって直和分割 $X=\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$ の個数 n はいくらでも大きくすることができるから, 特に n は 2 のべき $n=2^{k_1}$ であるとしてよい. そうすると B_i の全体 $\{B_i\}$ と $0,1$ の長さ k_1 の列の全体 $\{0,1\}^{k_1}$ の間に全単射

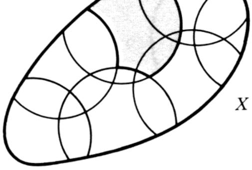


図 5.5

をつくることができる．同様に各 B_i を直径が $\varepsilon/2$ 未満であるような開かつ閉なる部分集合の直和 $\bigsqcup B_{ij}$ として表す．このとき必要ならば個数を増やすことによって，分割の個数は i によらず一定で，しかも 2 のべき 2^{k_2} であるとしてよい．そうすると各 i に対して，B_i を分割して得られた部分集合全体 $\{B_{ij}\}_{j=1,\cdots,2^{k_2}}$ と $\{0,1\}^{k_2}$ の間に全単射が存在する．この操作を繰り返して X の分割の列 $\{B_i\}$, $\{B_{ij}\}$, $\cdots$ を構成する．さて一点 $x \in X$ を決めたとき，各分割において x を含む部分集合は減少列 $B_i \supset B_{ij} \supset \cdots$ をなすが，その各部分集合に対応する 0, 1 の列を並べて得られる無限列，すなわち $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ の元

$$\overbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_{k_1}}^{k_1}\overbrace{\alpha_{k_1+1} \cdots \alpha_{k_1+k_2}}^{k_2}\alpha_{k_1+k_2+1} \cdots$$

を x に対応させる写像を $\varphi : X \to \{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ としよう．まず φ は構成より全射であるが，$\lim_{\ell\to\infty} \mathrm{diam} B_{i_1\cdots i_\ell} = 0$ より単射でもある．また $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ の基本開集合 $\{\alpha_1\}\times\cdots\times\{\alpha_\ell\}\times\{0,1\}\times\cdots$ の逆像が開かつ閉なる部分集合の和となることから φ は連続である．すなわち φ はコンパクト空間 X からハウスドルフ空間 $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ への連続な全単射であり，定理 4.12 (p.138) より同相写像となる．したがって X はカントール集合 $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ と同相であることが証明された．　□

5.1.4　弧状連結空間

位相空間 X の**道**とは，閉区間 $[a,b]$ から X への連続写像 $\gamma : [a,b] \to X$ あるいはその像をいう．これは曲線 (例 2.11, p.74) と同じ定義であるが，写像自身に興味がある場合に "曲線" を，その存在に興味がある場合には "道" を使うことが多い．道 $\gamma : [a,b] \to X$ に対し，$\gamma(a)$ をその**始点**，$\gamma(b)$ を**終点**と呼ぶ．X の二点 x, y に対してこれらを始点，終点とする道が存在するとき，x と y とは**道で結ぶこ**

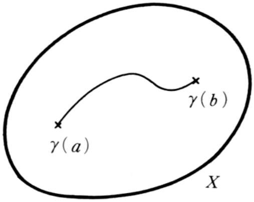


図 5.6　弧状連結空間

とができるという．空間の二点に対し，これらを結ぶ道が存在するという関係は同値関係である．位相空間 X の任意の二点を道で結ぶことができるとき，X は**弧状連結**であるという (図 5.6).

■ **例 5.9** ■ **凸集合，星型集合**

ユークリッド空間あるいは一般に線形空間の部分集合 A が**凸**であるとは，任意の $x, y \in A$ に対して線分 $(1-t)x+ty$, $0 \leq t \leq 1$ が A に含まれるときをいう．ノルム空間の開球，閉球は凸集合である．また A が**星型**であるとは，点 $x_0 \in A$ が存在して，任意の $y \in A$ に対して線分 $(1-t)x_0+ty$, $0 \leq t \leq 1$ が A に含まれるときをいう．この点 x_0 を星型集合 A の**中心**と呼ぶ (図 5.7). 凸集合は星型である．ノルム空間の二つの元 x, y を結ぶ線分の自然な表示 $(1-t)x+ty$ は t に関して連続であるから (例 1.30, p.32)，ノルム空間の星型部分集合は弧状連結である．□

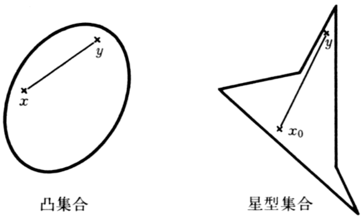


図 5.7 凸集合，星型集合

■ **例 5.10** ■ **球面 S^n の弧状連結性**

球面 S^n, $n \geq 1$ は，任意の二点を大円で結ぶことができるから弧状連結である．□

弧状連結性は連結性を導くが，逆は必ずしも成立しない．

【**定理 5.9**】 弧状連結空間は連結である．

証明 X を弧状連結空間とし，その一点 x_0 を固定する．定義より任意の x に対して，始点を x_0, 終点を x とする道 $\gamma_x : [a_x, b_x] \to X$ が存在する．区間 $[a_x, b_x]$ は連結であるから，連結不変性よりその γ_x による像 $\gamma_x[a_x, b_x]$ も連結．これらはすべて共通の x_0 を含むから，その和 $\bigcup_{x \in X} \gamma_x[a_x, b_x]$ は連結であるが，任意の $x \in X$ はこの和に属するから X 自身が連結となる (図 5.8).

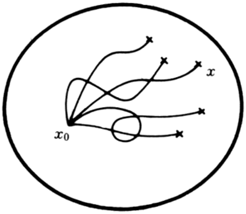


図 5.8 ■

■ 例 5.11 ■ 連結であって弧状連結でない空間

関数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ のグラフとして与えられる $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $A=\{(x,y);\ y=f(x),\ x>0\}$ を考える．この A は開区間 $(0,\infty)$ と同相であるから連結で，したがってその閉包 $\overline{A}=\{(x,y);\ y=f(x), x>0\}\cup\{(x,y);\ x=0, -1\leq y\leq 1\}$ も連結である (図 5.9)．しかし $\overline{A}$ の二点 $(0,0)$, $(1/\pi,0)$ をとるとき，$\overline{A}$ の中でこれらを結ぶ道は存在しない．実際，そのような道 $\gamma:[a,b]\to\overline{A}$, $\gamma(a)=(0,0)$, $\gamma(b)=(1/\pi,0)$ が存在したとしよう．道 $\gamma(t)=(\alpha(t),\beta(t))$ の x-成分 $\alpha(t)$ を用いて $a'=\sup\{t;\alpha(t)=0\}$ とおく．$\alpha(b)=1/\pi$ であるから，中間値の定理より部分区間 $[a',b]$ に $\alpha(b_m)=\dfrac{1}{2m\pi}$ なる b_m および $\alpha(c_m)=\dfrac{1}{\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi}$ なる c_m が存在する．a' の定義から $m\to\infty$ のとき $b_m\to a'$, $c_m\to a'$ となるが，一方関数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ は $x=b_m$ で値 0 を，$x=c_m$ で値 1 をとるから，道 γ の y-成分は $\beta(b_m)=0$, $\beta(c_m)=1$ を満たす．これは γ の連続性に反する．したがってこのような道は存在せず，$\overline{A}$ は弧状連結ではない．

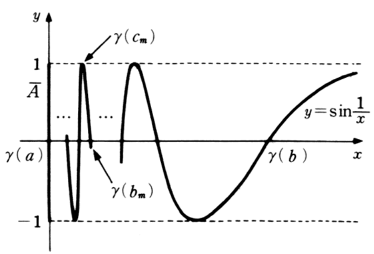


図 5.9 □

位相空間 X において道で結ぶことができるという同値関係を考えれば, この関係による点 x の同値類は x と道で結ぶことのできる X の点全体のなす部分集合である. これを x の**弧状連結成分**という. 連結成分の場合と異なり, 弧状連結成分は必ずしも閉集合ではない. 上の例における $A\subset\overline{A}$ がその反例となる.

【定理 5.10】 ユークリッド空間の開部分集合が連結ならば弧状連結となる.

証明 A をユークリッド空間の開部分集合とする. このとき $x\in A$ に対して適当な $\varepsilon>0$ をとれば $x\in U(x;\varepsilon)\subset A$ となる. 開円板 $U(x;\varepsilon)$ は弧状連結であるから, $U(x;\varepsilon)$ の元はすべて x の弧状連結成分に含まれる. よってこの場合弧状連結成分は開集合. したがって A の弧状連結成分への分割は開集合への分割であり, 各成分は開かつ閉なる A の部分集合となる. これより A が連結ならば, 弧状連結成分もただ一つであり, したがって A は弧状連結となる. ■

定理 5.10 の証明において用いられているのは, 各点 x の基本近傍系として弧状連結な集合よりなるものが存在するという事実である. このような空間は**局所弧状連結**と呼ばれ, その開集合は連結であれば常に弧状連結となる. 例えば連結な多様体は常に弧状連結である.

<まとめ> 連結性の定義と実数空間の連結部分集合の決定, 連結不変性とその応用としての中間値の定理, 連結成分, 弧状連結性などについて述べた.

[例題] 2 次の実一般線形群 $GL(2;\boldsymbol{R})=\{A\in M(2;\boldsymbol{R});\ \det(A)\neq 0\}$ および 2 次の複素一般線形群 $GL(2;\boldsymbol{C})=\{A\in M(2;\boldsymbol{C});\ \det(A)\neq 0\}$ における単位行列 E の連結成分を求めよ.

(解) 実一般線形群 $GL(2;\boldsymbol{R})$ においては, 連続写像 $\det : GL(2;\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}$, $A\mapsto\det A$ の像 $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ における $\det(E)=1$ の連結成分が $(0,\infty)$ であることから, 単位行列 E の連結成分は $GL_+(2;\boldsymbol{R})=\{A\in GL(2;\boldsymbol{R});\det A>0\}$ に含まれる. したがって $GL_+(2;\boldsymbol{R})$ が弧状連結であることをいえば, これが求める連結成分で

ある. 任意の $A \in GL_+(2;\boldsymbol{R})$ をとる. A が実固有値をもつ場合, 適当な変換行列 P を用いて $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P$, $\lambda\mu>0$ あるいは $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P$, $\lambda\neq 0$ と表すことができる (ジョルダン標準形). $\lambda>0$ のときには $\lambda_t=(1-t)\lambda+t$, $\lambda<0$ のときには $\lambda_t=(1-t)\lambda-t$ とし, 同様に μ_t を定義すれば $P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_t & 0\\ 0 & \mu_t\end{pmatrix}P$ は $GL_+(2;\boldsymbol{R})$ 内で A と E あるいは $-E$ とを結ぶ道を与える. 後者の場合は $P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_t & 1-t\\ 0 & \lambda_t\end{pmatrix}P$ が A と $\pm E$ とを結ぶ. ここで回転行列の族 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $0\leq\theta\leq\pi$ が E と $-E$ とを結ぶから, 結局 A と E を結ぶ道が存在する. A が虚な固有値をもつ場合, 適当な変換行列 P を用いて $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta\\ \lambda\sin\theta & \lambda\cos\theta\end{pmatrix}P$, $\lambda>0$ と表すことができ, このとき $\begin{pmatrix}\lambda\cos(1-t)\theta & -\lambda\sin(1-t)\theta\\ \lambda\sin(1-t)\theta & \lambda\cos(1-t)\theta\end{pmatrix}$ が A と対角行列 λE とを $GL(2;\boldsymbol{R})$ の中で結ぶ. したがってこの場合も A と E を結ぶ道が存在する.

複素一般線形群 $GL(2;\boldsymbol{C})$ についてはそれ自身が弧状連結であり, したがって E の連結成分は $GL(2;\boldsymbol{C})$ と一致する. 各元 $A\in GL(2;\boldsymbol{C})$ は, 適当な変換行列 P を用いて $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P$, $\lambda,\mu\neq 0$ あるいは $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P$, $\lambda\neq 0$ と表すことができる. λ と 1 をつなぐ $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ 内の道を λ_t, 同じく μ と 1 をつなぐ道を μ_t とおけば, 前者の場合は $P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_t & 0\\ 0 & \mu_t\end{pmatrix}P$ が, 後者の場合は $P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_t & 1-t\\ 0 & \mu_t\end{pmatrix}P$ が $GL(2;\boldsymbol{C})$ 内で A と単位行列 E とを結ぶ.

以上の議論ではジョルダン標準形に関する知識を仮定したが, これを回避することもできる. ジョルダン標準形が必要となるのは, 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の固有多

ジョルダン: Camille Jordan, 1838-1922.

項式が重根をもつ場合で，その条件は $(a+d)^2-4(ad-bc)=0$ で与えられる．したがってこのような A のいくらでも近くに，異なる固有値をもつ行列 A' が存在する．$GL_+(2;\boldsymbol{R})$, $GL(2;\boldsymbol{C})$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}^4$, $\boldsymbol{C}^4$ の開部分集合であったから，A と A' とが十分近ければ，これらを結ぶ線分も $GL_+(2;\boldsymbol{R})$ あるいは $GL(2;\boldsymbol{C})$ に含まれる．したがって異なる固有値をもつ行列と単位行列を結ぶ道が存在することをいえば十分である．

一般の n についても $GL(n;\boldsymbol{R})$ における単位行列の連結成分は $GL_+(n;\boldsymbol{R})=\{A\in GL(n;\boldsymbol{R});\ \det A>0\}$ で与えられ，また $GL(n;\boldsymbol{C})$ は連結である． ■

5.2* 単 連 結 性

単連結性の概念は基本群まで到達しなければ本物ではないが，それは位相幾何学の教科書に譲ることとして，ここでは定義と二，三の応用について述べる．

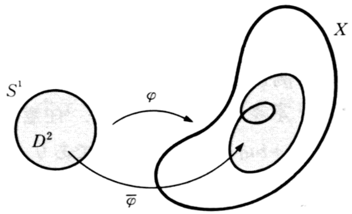


図 5.10 単連結空間

位相空間 X が**単連結**とは，任意の連続写像 $\varphi: S^1\to X$ が連続な拡張 $\bar{\varphi}: D^2\to X$ をもつときをいう (図 5.10)．弧状連結性は任意の二点を結ぶ道が存在することで定義されたが，これは任意の写像 $\varphi: \{-1,1\}\to X$ が連続写像 $\bar{\varphi}: [-1,1]\to X$ に拡張することと等しい．ここで $[-1,1]$ は 1 次元円板 D^1, $\{-1,1\}$ はその境界たる 0 次元球面 S^0 と解釈できるから，おのおのの次元を 1 上げたものが単連結性の定義である．これはまた写像の連続的変形，すなわちホモトピーの概念を用いて以下のように言い換えることができる．空間 X から Y への二つの写像 $\varphi, \psi: X\to Y$ が**ホモトピック**とは，連続写像 $\Phi: X\times[0,1]\to Y$ であって，$\Phi(x,0)=\varphi(x)$, $\Phi(x,1)=\psi(x)$ を満たすものが存在するときをいう．このとき Φ

あるいは写像の族 $\varphi_t : X \to Y,\ 0 \le t \le 1,\ \varphi_t(\cdot) = \Phi(\cdot, t)$ を φ と ψ とをつなぐ**ホモトピー**と呼ぶ (図 5.11). 特に定値写像とホモトピックであるような写像を**零ホモトピック**, そのホモトピーを**零ホモトピー**という. 写像 $\varphi : S^1 \to X$ に対し, 零ホモトピーは $S^1 \times \{1\}$ 上値が一定であるような φ の拡張 $S^1 \times [0,1] \to X$ であるから, これは $D^2 \approx S^1 \times [0,1]/S^1 \times \{1\}$ からの写像と見なすことができる. 逆に φ の拡張 $\bar{\varphi} : D^2 \to X$ は φ の零ホモトピーを与える. したがって空間 X が単連結であることと, 任意の連続写像 $\varphi : S^1 \to X$ が零ホモトピックであることは同値である.

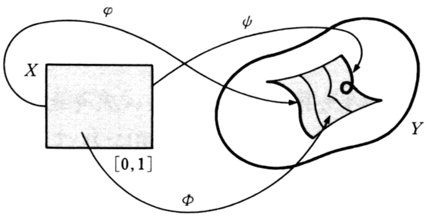


図 5.11　ホモトピー

■ **例 5.12** ■ **凸集合, 星型集合**　(参照例 5.9, p.175)

A をノルム空間 V の星型集合, $a_0 \in A$ をその中心とする. 任意の連続写像 $\varphi : S^1 \to A$ に対し, 族 $\varphi_t(x) = (1-t)\varphi(x) + ta_0$ は A への写像であり, φ の零ホモトピーを与える. したがって任意の星型集合は単連結である. 特に任意の凸集合およびノルム空間自身も単連結である. □

次の命題は, 値域がユークリッド空間の開集合である場合, 与えられた写像をホモトピーの範囲で性質のよい写像にとりかえることができることを主張する.

【命題 5.11】　$\varphi : X \to \Omega$ を, コンパクト空間 X からユークリッド空間の開集合 Ω への連続写像とする. このとき $\varepsilon > 0$ が存在して, 各 $x \in X$ に対して $\|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)\| < \varepsilon$ を満たす任意の $\bar{\varphi} : X \to \Omega$ は φ とホモトピックとなる.

証明　各 $z \in \Omega$ の ε_z-近傍 $U(z; \varepsilon_z),\ \varepsilon_z > 0$ を Ω に含まれるようにとる. この $U(z; \varepsilon_z)$ の全体は Ω の開被覆をなすが, φ の像 $\varphi(X)$ はコンパクトであるから,

ルベーグ数 $\varepsilon>0$ が存在する. すなわちすべての $x\in X$ に対して $\varphi(x)$ の ε-近傍は, 適当な $U(z;\varepsilon_z)$ に含まれる. このとき $\bar{\varphi}: X\to\Omega$ が $\|\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)\|<\varepsilon$ を満足すれば, $\varphi(x)$ と $\bar{\varphi}(x)$ とを結ぶ線分は $U(z,\varepsilon_z)$ に含まれ, したがって Ω に含まれる. よって $\varphi_t(x)=(1-t)\varphi(x)+t\bar{\varphi}(x)$ が求めるホモトピーを与える. ■

■ 例 5.13 ■ 球面 S^n の単連結性

球面 S^2 はユークリッド空間の開集合ではないが, 各点 $p\in S^2$ の弧長による $\pi/2$-近傍 $U(p;\pi/2)$ の任意の二点は一意的に最短測地線 (大円の一部) で結ぶことができるから, 命題 5.11 をそのまま適用することができる. したがって連続写像 $\varphi: S^1\to S^2$ に対し, 分点を十分多くとって φ を最短測地線による折れ線 $\bar{\varphi}$ で近似すれば, $\bar{\varphi}$ は φ とホモトピックである (図 5.12). 測地線による閉じた折れ線 $\bar{\varphi}: S^1\to S^2$ については, その像に含まれないような点 $p\in S^2$ が存在する. このとき $S^2\setminus\{p\}$ は平面 $\boldsymbol{R}^2$ と同相であるから単連結で, よって $\bar{\gamma}$ は零ホモトピック. これよりもとの γ も零ホモトピックであるから S^2 は単連結である. 3 次元以上の球面の単連結性も同様に証明される. この議論において曲線の像に含まれない点を探すために, 折れ線で近似する手順は省くことができない. 球面すべてを埋め尽くすような曲線が存在するからである (参照例 6.14, p.213).

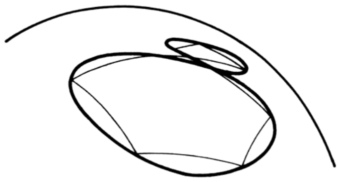


図 5.12 □

空間 X からその部分空間 A への写像 $r: X\to A$ であって, 任意の $a\in A$ に対して $r(a)=a$ を満たすものを, X から A への**レトラクション**と呼び, このような写像が存在するとき部分空間 A は X の**レトラクト**であるという.

【命題 5.12】 単連結空間のレトラクトは単連結である.

証明　X を単連結空間, A をその部分空間, $r: X \to A$ を X から A へのレトラクションとする. 任意の連続写像 $\varphi: S^1 \to A$ は, これを X への写像と見なしたときには零ホモトピックであるから 零ホモトピー $\Phi: S^1 \times [0,1] \to X$ が存在するが, この Φ とレトラクション r との合成 $r \circ \Phi$ は部分空間 A における φ の零ホモトピーを与える. ■

【系 5.13】　空間 X, Y が空集合でない場合, 積空間 $X \times Y$ が単連結であるのは X, Y がともに単連結であるとき, そのときに限る.

証明　射影 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ は, X を部分空間 $X \times \{y_0\}$ と同一視するときレトラクションとなっているから, 積空間 $X \times Y$ が単連結であれば X, 同様に Y も単連結である. 逆に X, Y がともに単連結であれば, 任意の写像 $\varphi: S^1 \to X \times Y$ に対して, φ と射影との合成 $\mathrm{pr}_X \circ \varphi$, $\mathrm{pr}_Y \circ \varphi$ はともに零ホモトピックであるから, これを与えるホモトピーを Φ_X, Φ_Y とするとき, 写像 $\Phi(t,s) = (\Phi_X(t,s), \Phi_Y(t,s))$ が φ の零ホモトピーとなる. したがって積空間 $X \times Y$ も単連結である. ■

通常の読者が単連結性の概念にはじめて触れるのは関数論におけるコーシーの積分定理およびその応用としての不定積分の存在であろう.

【定理 5.14 (コーシーの積分定理)】　Ω を複素平面 $\boldsymbol{C}$ の領域, すなわち連結な開集合, $f(z)$ を Ω 上の正則関数, Γ を Ω の区分的に可微分な閉曲線とする. このとき Γ が Ω で零ホモトピックならば

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \ .$$

証明　条件より閉曲線 Γ は, 三角形 $\triangle$ からの写像 $\varphi: \triangle \to \Omega$ の境界 $\partial\triangle$ への制限と考えてよい. 三角形 $\triangle$ を図 5.13 のように分割すれば, φ は各小三角形上アファインであるような $\bar{\varphi}$ で近似されるが, 近似がよければこの $\bar{\varphi}$ も Ω への写像である (参照 命題 5.11). 積分値は経路に関して連続であるから $\bar{\varphi}|_{\partial\triangle}$ に関する積分が 0 であれば結論が従うが, この積分は各小三角形の境界上の積分の和であるから, 結局アファイン三角形 $\triangle$ について $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$ を示せばよい.

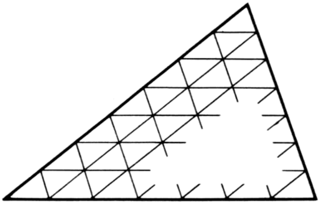


図 5.13

さて $\triangle\subset\Omega$ をアファインな三角形, その周の長さを L, ε を任意の正の数とする. $f(z)$ は Ω の各点 z_0 で複素微分可能であったから, 展開

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+R(z-z_0)$$

が成立するが, z_0 の近傍 U_{z_0} を小さくとって, U_{z_0} 上 $\left|\dfrac{R(z-z_0)}{z-z_0}\right|<\varepsilon$ が成り立つようにできる. このような近傍の全体は Ω の被覆をなすから, ルベーグ数の議論より, $\triangle$ の分割 (図 5.13) を細かくとって, 各小三角形 $\triangle_i$ が適当な $z_i\in\Omega$ の近傍 U_{z_i} に含まれるとしてよい. このとき $f(z_i)+f'(z_i)(z-z_i)$ は z の 1 次式で, 不定積分 $f(z_i)z+\dfrac{1}{2}f'(z_i)(z-z_i)^2$ をもつから, その $\partial\triangle_i$ 上の積分は 0. よって分割の個数を N^2 とすれば, 小三角形 $\triangle_i$ の周の長さが L/N で, 一方 $|R(z-z_i)|\le\varepsilon|z-z_i|$ であることより $\left|\int_{\partial\triangle_i}f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial\triangle_i}R(z-z_0)dz\right|\le\varepsilon L^2/N^2$. したがって $\left|\int_{\partial\triangle}f(z)dz\right|=\sum_i\left|\int_{\partial\triangle_i}f(z)dz\right|<\varepsilon L^2$. ε は任意であったから, これは $\int_{\partial\triangle}f(z)dz=0$ を示している. ■

領域 Ω が単連結であれば, Ω の任意の閉曲線上の正則関数の積分は 0 となる. 点 $z_0\in\Omega$ を固定するとき, z_0 と $z\in\Omega$ を結ぶ道 γ に対して, 積分 $\int_\gamma f(z)dz$ を考えよう. z_0 と z を結ぶ別の道を γ', この γ' の向きを逆にした道を $\bar{\gamma}'$ とすれば, γ と $\bar{\gamma}'$ をつないだ道は閉じているから, その上での $f(z)$ の積分は 0 となる. すなわち $\int_\gamma f(z)dz+\int_{\bar{\gamma}'}f(z)dz=0$. よって $\int_{\gamma'}f(z)dz=-\int_{\bar{\gamma}'}f(z)dz=\int_\gamma f(z)dz$ であるから, 積分 $\int_\gamma f(z)dz$ の値は γ のとり方によらない. これは不定積分 $\int_{z_0}^z f(z)dz$

が, 単連結な領域上では積分路によらず定まることを意味している.

【定理 5.15】 S^1 は単連結ではない.

証明　複素平面から一点を除いた $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ 上の正則関数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ について

$$\int_{|z|=1} f(z)dz \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{\sqrt{-1}t}}\sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}t}dt \;=\; 2\pi\sqrt{-1}$$

より, この積分路 S^1 は $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ で零ホモトピックではない. よって $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ は単連結でないが, この空間は積 $S^1\times(0,\infty)$ と同相で, 第二成分の $(0,\infty)$ は単連結であったから, 結局 S^1 が単連結でないことがわかる. ■

■ 例 5.14 ■ 平面と3次元以上のユークリッド空間との識別 (参照 例 5.6, p.171)
ユークリッド平面から一点を除いた $\boldsymbol{R}^2\setminus\{0\}\approx\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ は単連結ではない. 一方, 2次元以上の球面は単連結であったから (例 5.13, p.181), $n\geq 2$ のとき $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}\approx S^n\times(0,\infty)$ も単連結. したがって平面と3次元以上のユークリッド空間とは同相ではない. これは単連結性を用いた議論であるが, n 次元球面 S^n からの任意の写像が零ホモトピックであることでさらに高次の連結性を定義すれば, 異なる次元のユークリッド空間が互いに同相とならないことが証明できる. □

■ 例 5.15 ■ ブラウアーの不動点定理

2次元閉円板 D^2 から自分自身への任意の連続写像 $\varphi: D^2\to D^2$ は**不動点**, すなわち $\varphi(x_0)=x_0$ なる点 x_0 をもつ. これを背理法で証明しよう. このような点が存在しなければ, 任意の $x\in D^2$ に対して $\varphi(x)\neq x$. このとき $\varphi(x)$ と x を結ぶ線分を端点 x から境界 ∂D^2 にぶつかるまで延長し, その交点を $\psi(x)$ とおく (図 5.14). この ψ は D^2 から境界 ∂D^2 への連続写像で, かつ $x\in\partial D^2$ に対しては $\psi(x)=x$ を満たす. したがって ψ は D^2 から ∂D^2 へのレトラクションであるが, これは D^2 が単連結であり, $\partial D^2\approx S^1$ が単連結でないことに矛盾する.

ブラウアー: Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966.

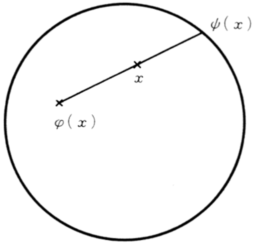


図 5.14 □

＜まとめ＞ 単連結性および写像のホモトピーを定義し, 線形空間の凸領域, 2次元以上の球面などが単連結であること, 逆に S^1 が単連結ではないことを示した. その応用として2次元ユークリッド空間とそれ以上の次元のユークリッド空間が同相ではないこと, ブラウアーの不動点定理などが得られた.

［例題］ 次の空間が単連結でないことを示せ.

(1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ から有限個の点 $p_1,\cdots,p_k,\ k\geq 1$ を除いた空間 $\boldsymbol{R}^2\backslash\{p_i\}$.

(2) 種数が正の曲面 (参照例 2.27, p.94).

（解） (1) 簡単のため $p_1=0$ とする. このとき 0 を中心とする適当な半径の円 $S_r=\{x;\|x\|=r\}$ は $\boldsymbol{R}^2\backslash\{p_i\}$ に含まれ, 写像 $\boldsymbol{R}^2\backslash\{p_i\}\to S_r,\ x\mapsto \dfrac{r}{\|x\|}x$ はレトラクションとなる. よって $S_r\approx S^1$ が単連結でないことから $\boldsymbol{R}^2\backslash\{p_i\}$ も単連結ではない.

(2) Σ_g を種数 $g>0$ の曲面とする. 図 5.15 で与えられるような Σ_g 上の閉曲線 $\Gamma\subset\Sigma_g$ を考えれば, Σ_g から Γ へのレトラクションが存在する. Γ は S^1 と同相で単連結でないから Σ_g も単連結ではない.

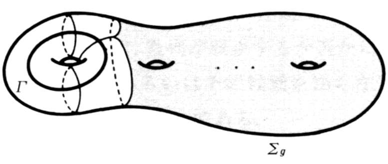


図 5.15 ■

章末問題

1. X をハウスドルフかつコンパクトな位相空間とする．このとき X の連結閉部分集合の減少列 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ に対して，その共通部分 $\bigcap_n A_n$ が連結となることを示せ．

2. 位相空間 X 上の曲線 $\gamma : [0,\infty) \to X$ に対して，その **ω-極限集合**を $\omega(\gamma) = \bigcap_{T>0} \overline{\{\gamma(t); t \geq T\}}$ で定義する．ただし $\overline{\{\gamma(t); t \geq T\}}$ は $\{\gamma(t); t \geq T\}$ の閉包である．

(1) 空間 X がコンパクトならば $\omega(\gamma)$ は常に連結となることを示せ．

(2) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の ω-極限集合で連結でないものを構成せよ．

多様体 M 上に適当な条件を満たす自励系の微分方程式が定義されていれば，各点 $x \in M$ に対して，それを初期値とする解曲線 $\gamma_x : [0,\infty) \to M$ が定まる．解曲線の ω-極限集合は，この微分方程式のもとでの初期値 x の時間発展の極限を表している．

3. 連結な正規空間が二点以上を含めば連続以上の濃度をもつことを示せ．

4. 空でない空間 X, Y に対し，X と Y がともに弧状連結であることと，積空間 $X \times Y$ が弧状連結であることとは同値であることを示せ．

5. 2次元以上のユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$ の部分集合 A が有界でかつ凸であるとき，その補集合 $\boldsymbol{R}^n \setminus A$ は連結であることを示せ．A が有界でないときはどうか．

6. 以下の空間が連結であることを示せ．

(1) 2次元以上のユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$ から高々可算な部分集合 Λ を除いた空間 $\boldsymbol{R}^n \setminus \Lambda$.

(2) 2次元以上の連結な多様体 M から高々可算な部分集合 Λ を除いた空間 $M \setminus \Lambda$.

7. 平面上に単純閉曲線で囲まれた二つの凸領域 A, B が与えられたとき，A, B を同時に，面積が半分になるように二つに分ける直線が存在することを示せ．

8. 位相群における単位元の連結成分は正規部分群であることを示せ．

9. 3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間について以下を示せ．

(1) 有限個の点 $p_1, \cdots, p_N$ を除いた空間 $\boldsymbol{R}^3 \setminus \{p_i\}$ は単連結である．

(2) 有限個の直線 $\ell_1, \cdots, \ell_N$, $N \geq 1$ を除いた空間 $\boldsymbol{R}^3 \setminus \bigcup \ell_i$ は単連結ではない．

6

完備距離空間

ここまでは距離空間を題材として空間の位相構造, 特に各点のまわりの局所的構造を問題としてきた. しかし距離関数自身は空間全体で定義されており, 二点間の距離が常に比較できるという意味で, 全体的構造をも与えている. 距離空間の典型例である実数空間の大域的構造のうち, 最も重要であるのは有界な部分集合に対する上限の存在, あるいはこれと同値な数列の収束に関するコーシーの判定法であろう. この判定法が成立する距離空間を完備という. 完備でない距離空間も存在するが, 一方で任意の距離空間を完備距離空間の部分空間として埋め込むことができる. これを距離空間の完備化と呼ぶ. 最初の節 6.1 で完備性に関する定義と基本的性質を, 次の節 6.2 で具体的な関数空間を扱う.

6.1 完　備　性

この節では, 完備性の定義, 距離空間の完備化, 完備性とコンパクト性の関係および完備性の応用について述べる.

6.1.1 コーシー列

距離空間における点列の収束を扱う. 距離空間の典型例であり, そのモデルでもある実数空間においては, 数列が収束するか否かに対してコーシーの判定法がある (p.244). これは極限あるいはその候補を知らなくとも収束の判定が可能であるという点で, 特に重要なものである.

【コーシーの判定法】 実数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は $\lim_{n,m\to\infty}|a_n-a_m|=0$ が成立すること.

この判定法を一般の距離空間の点列の場合に考察しよう. 距離空間 X の点列 $\{x_n\}$ が**コーシー列**あるいは**基本列**であるとは

$$n,m\to\infty \quad \text{のとき} \quad d(x_n,x_m)\to 0$$

が成り立つときをいう. ε-δ 式にいえば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して自然数 N が存在して $n,m\geq N$ ならば $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ となること.

【命題 6.1】 収束点列はコーシー列である.

証明　距離空間の点列 $\{x_n\}$ が極限 x_∞ に収束するならば, $n,m\to\infty$ に対して

$$d(x_n,x_m) \ \leq\ d(x_n,x_\infty)+d(x_m,x_\infty) \ \to\ 0\,. \qquad \blacksquare$$

逆に任意のコーシー列が収束するような距離空間を**完備**と呼ぶ. また距離空間の部分集合が**完備**であるとは, それが部分距離空間として完備であるときをいう. すべての距離空間が完備であるわけではない. 例えば, 有理数全体のなす空間 $\boldsymbol{Q}$ における数列 $\{a_n\}$, $a_n=\dfrac{1}{10^n}\left[10^n\sqrt{2}\right]$ を考えると, この数列は実数空間 $\boldsymbol{R}$ においては収束するからコーシー列である. 一方で実数空間における極限 $\sqrt{2}$ が無理数で, $\boldsymbol{Q}$ に属さないことから, $\{a_n\}$ は $\boldsymbol{Q}$ においては収束しない.

■ 例 6.1 ■ ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$

コーシーの判定法は実数空間 $\boldsymbol{R}$ が完備であることを示している. また n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ のコーシー点列 $\{x_k\}$, $x_k=(x_{k1},\cdots,x_{kn})$ に対して, $|x_{ki}-x_{k'i}|\leq d(x_k,x_{k'})$ より, その第 i 成分, $1\leq i\leq n$ のなす数列 $\{x_{ki}\}$ はコーシー列である. その極限を p_i と書けば, もとの点列 $\{x_k\}$ は $p=(p_1,\cdots,p_n)$ に収束する. したがってユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ は完備である. 同様に複素数空間 $\boldsymbol{C}$, 複素 n 次元空間 $\boldsymbol{C}^n$ も通常の距離に関して完備となる. □

■ **例 6.2*** ■ **上半平面** H　(参照 例 1.8, p.9; 例 1.20, p.22)
上半平面 H は, 計量 $ds^2=\dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$ による積分で定義された距離 $\tilde{d}_H$ に関して完備である. これを証明しよう. まず点 $p_0=(0,1)$ の弧長 $\tilde{d}_H$ に関する 1/3-閉球 $\widetilde{B}(p_0;1/3)$ がコンパクトであることをいう. $\tilde{d}_H(p,p_0)\leq 1/3$ を満たす p について $(1-1/3)d(p,p_0)\leq\tilde{d}_H(p,p_0)$ が成り立つことから, $\widetilde{B}(p_0;1/3)$ はユークリッドの距離に関する 1/2-閉球 $B(p_0;1/2)$ に含まれる (図 6.1). $B(p_0,1/2)$ は H に含まれるが, 弧長による距離 $\tilde{d}_H$ はユークリッドの距離と同じ位相を H に定めるから, $B(p_0;1/2)$ は H の部分集合としてもコンパクトで, したがって $B(p_0;1/2)$ に含まれる閉集合 $\widetilde{B}(p_0;1/3)$ もコンパクトである. 一方で各点 $p\in H$ に対して p_0 を p に写す等長写像が存在するから, p の 1/3-閉球 $B(p;1/3)$ もコンパクトである. さてコーシー列 $\{p_n\}$ は, n が大きいとき適当な点 $p\in H$ の 1/3-閉球に含まれるから, $B(p;1/3)$ がコンパクトであることより収束部分列 $\{p_{n'}\}$ をもつ. $p_{n'}\to p_\infty$ とすれば, $\{p_n\}$ がコーシー列であることから $d(p_n,p_\infty)\leq d(p_n,p_{n'})+d(p_{n'},p_\infty)\to 0$. これは $\{p_n\}$ が p_∞ に収束すること, したがって H が完備であることを示している.

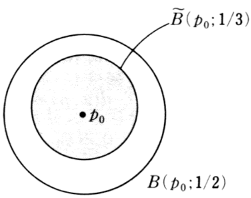


図 6.1 □

距離空間が完備であるか否かはその空間の上での解析にとって重要な問題であるが, 残念ながら完備性は位相的な性質ではない. すなわち完備距離空間と同相な距離空間が必ずしも完備であるとは限らない. 例えば開区間 $(0,1)$ と実数空間 $\boldsymbol{R}$ は, 写像 $x\mapsto\tan\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ によって同相で, 実数空間 $\boldsymbol{R}$ は完備であるけれども開区間 $(0,1)$ は完備ではない. $a_n=1/n$ によって与えられるコーシー列 $\{a_n\}$ が $(0,1)$ 内に極限をもたないからである. しかし完備距離空間の部分集合

については, それが完備であるかどうかは相対的な位相的性質で決定される.

【命題 6.2】 完備距離空間の部分集合が完備であるための必要十分条件はそれが閉部分集合であること.

証明 X を完備距離空間, A をその部分集合とする. A が部分距離空間として完備であると仮定する. A の点列 $\{a_n\}$ が X で収束すれば, それはコーシー列であるから A でも収束する. 収束点列の極限は一意であるから, これはもとの収束極限が A に属することを意味する. したがって A は閉集合である. 逆に A が閉集合であるとし, $\{a_n\}$ を A のコーシー列とする. この点列 $\{a_n\}$ は当然 X でもコーシー列であるから, X の完備性より極限をもつ. A が閉集合であることからこの極限は A に属し, したがって $\{a_n\}$ は A でも収束する. ■

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ が完備であったと同じ理由で次が成立する.

【定理 6.3】 完備距離空間の有限直積, 可算直積はまた完備である.

証明 可算直積の場合に証明する. 有限直積の場合も同様である. X_k, $k=1,2,\cdots$ を完備距離空間, $X=\prod X_k$ をその直積距離空間とする. $x=(x_k), y=(y_k)\in X$ の距離は, X_k の距離 d_k を用いて $d(x,y)=\sum \dfrac{1}{2^k}d_k(x_k,y_k)$ と表されたから $d_k(x_k,y_k)\leq 2^k d(x,y)$ であり, これより点列 $\{x_n\}$ が X のコーシー列であれば, その第 k 成分からなる X_k の点列 $\{x_{nk}\}$ もコーシー列となる. したがって X_k の完備性より $x_{nk}\to p_k$ なる $p_k\in X_k$ が存在するから, もとの点列 $\{x_n\}$ は $p=(p_1,p_2,\cdots)\in X$ に収束する. ■

距離空間の同相写像は必ずしも完備性を保たないが, 一様連続写像によって距離空間の同値を定義すれば, これは完備性を保つ. 距離空間 (X,d_X), (Y,d_Y) の間の写像 $\varphi: X\to Y$ が一様連続とは, 任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して, $d_X(x',x)<\delta$ のとき $d_Y(\varphi(x'),\varphi(x))<\varepsilon$ が成立することであった. 二つの距離空間 X, Y に対して, φ および φ^{-1} がともに一様連続であるような全単射 $\varphi: X\to Y$ が存在するとき, X と Y とは**一様同値**であるといい, この φ を**一様同値写像**と呼ぶ. 以下で述べるように一様同値写像は完備性を保つ.

【命題 6.4】 写像 $\varphi: X \to Y$ が一様連続であれば, 点列 $\{x_n\}$ がコーシー列のとき, その像 $\{\varphi(x_n)\}$ もコーシー列となる.

証明は明らかであろう. しかしこの命題の逆は成立しない (章末問題 4, p.217).

【定理 6.5】 完備距離空間と一様同値な距離空間は完備である.

証明　(X, d_X) を完備な距離空間, (Y, d_Y) を (X, d_X) と一様同値な距離空間, $\varphi: X \to Y$ を一様同値を与える写像とする. 距離空間 Y のコーシー列 $\{y_n\}$ が収束極限をもつことをいえばよい. φ が一様同値写像であることから, 点列 $\{y_n\}$ の φ による逆像 $\{\varphi^{-1}(y_n)\}$ もコーシー列である. したがって X の完備性より $\varphi^{-1}(y_n) \to x_\infty$ なる $x_\infty \in X$ が存在する. $y_\infty = \varphi(x_\infty)$ とおけば, φ の連続性より $y_n \to y_\infty$ が従う. すなわち点列 $\{y_n\}$ は収束極限 y_∞ をもつ. ■

6.1.2* 完　備　化

一般の距離空間は必ずしも完備とは限らないが, これを部分距離空間とする完備距離空間が常に存在する. 距離空間 X に対して, 完備な距離空間 X^* と X から X^* への等長な埋め込み $\iota: X \to X^*$ の対 (X^*, ι) で, 像 $\iota(X)$ が X^* で稠密となるものを X の**完備化**あるいは**完備拡大**という. 空間 X^* 自身を X の完備化と呼ぶことも多い. 完備化を与える写像 $\iota: X \to X^*$ は単射であるから, X の元と ι による像を同一視し, しばしば X を 完備化 X^* の部分集合と見なす.

【命題 6.6】 X を完備距離空間, X_0 を X の稠密な部分集合とする. このとき X_0 から別の完備距離空間 Y への任意の一様連続写像は, X から Y への一様連続写像に一意的に拡張する.

証明　$\varphi: X_0 \to Y$ を一様連続写像とする. 各点 $x \in X$ に対して, X_0 の稠密性より x に収束する X_0 の点列 $\{x_n\}$ が存在する. この点列を用いて $\varphi: X \to Y$ を $\varphi(x) = \lim \varphi(x_n)$ で定義する. φ が一様連続であることから点列 $\{\varphi(x_n)\}$ はコーシー列であり, Y の完備性より極限 $\lim \varphi(x_n)$ が存在する. 同じ x に収束する別の点列 $\{x'_n\}$ に対し, $\{x_n\}$ と $\{x'_n\}$ から交互にとって得られる点列

$\{x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots\}$ を考えれば, この点列も x に収束するからコーシー列であり, φ による像は収束する. したがって $\lim \varphi(x_n') = \lim \varphi(x_n)$ であり, $\varphi(x)$ の定義は点列 $\{x_n\}$ のとり方によらない. また $x \in X_0$ に対しては点列 $\{x_n\}$, $x_n = x$ が x に収束することから, もとの定義と一致する. よって φ は X 上への連続な拡張をもつ. 一意性は明らかであろう. 次に, 拡張された φ の一様連続性をいう. ε を正の数とする. φ は X_0 上で一様連続であったから, $\delta > 0$ を選んで, X_0 上では $d_X(x, x') < \delta$ のとき $d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) < \varepsilon$ が成り立つようにできる. X の二点 x, x' が $d_X(x, x') < \delta$ を満たすとしよう. x, x' に収束する X_0 の点列 $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ をとれば, 距離関数と φ の連続性より $d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) = \lim d_Y(\varphi(x_n), \varphi(x_n'))$ であるが, $x_n \to x$, $x_n' \to x'$ より十分大きい n について $d_X(x_n, x_n') < \delta$, したがって $d_Y(\varphi(x_n), \varphi(x_n')) < \varepsilon$. すなわち $d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \varepsilon$ が成り立つが, これは φ が X 上で一様連続であることを示している. ■

■ 例 6.3 ■　指数関数

正の実数 $a > 0$ を底とする指数関数 a^x の定義を復習しよう. 簡単のため $a > 1$ とする. 自然数 n に対しては $a^0 = 1$ および $a^{n+1} = a \cdot a^n$ によって帰納的に, また負の整数 n に対しては $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$ によって定義する. 次に有理数 $\dfrac{n}{m}$ に対しては, 方程式 $x^m = a^n$ を満たす正の解がただ一つであることから, これを $a^{\frac{n}{m}}$ とおく. さてこの定義のもとで写像 $f : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$, $f(p) = a^p$ の定義域を $\boldsymbol{R}$ に拡張しよう. まず有理数 p, q に対して加法公式 $f(p+q) = f(p)f(q)$ が成り立ち, したがって $f(p)$ は p に関して単調増加である. また $h > 0$ のとき自然数 n に対して $(1+h)^n > 1 + nh$ が成り立つことから, $p \to 0$ のとき $f(p) \to f(0) = 1$ となる. これより任意の $K \in \boldsymbol{Q}$, $K > 0$ に対して, f を $\boldsymbol{Q} \cap [-K, K]$ へ制限した写像は一様連続である. 実際 $|f(q) - f(p)| \leq a^p |a^{q-p} - 1| \leq a^K |a^{q-p} - 1|$ より差 $q - p$ が小さければ関数値の差 $f(q) - f(p)$ も小さい. したがって f を $\boldsymbol{Q} \cap [-K, K]$ の完備化である閉区間 $[-K, K]$ 上の連続関数に拡張することができる. この拡張は一意的であったから, $f(x)$ の値は K のとり方によらない. すなわち f は関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ に拡張されたが, 任意の $K \in \boldsymbol{Q}$, $K > 0$ について閉区間 $[-K, K]$ 上連続であったから, 定義域の $\boldsymbol{R}$ 全体で連続である. □

次の定理がこの節の目標であった.

【定理 6.7】 任意の距離空間に対しその完備化が存在し, また次の意味で一意的である. すなわち (X^*, d^*), (X^{**}, d^{**}) を (X, d) の完備化, 対応する埋め込みを $\iota : X \to X^*$, $\iota' : X \to X^{**}$ とするとき, 全単射である等長写像 $f : (X^*, d^*) \to (X^{**}, d^{**})$ であって $f \circ \iota = \iota'$ を満たすものが存在する.

証明 まず一意性から証明する. X^*, X^{**} がともに距離空間 X の完備化であれば, X は X^* および X^{**} の稠密な部分集合と見なすことができるから, 一様連続写像である恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ は一様連続写像 $f : X^* \to X^{**}$ および $g : X^{**} \to X^*$ に拡張する. これらの合成 $g \circ f : X^* \to X^*$ はまた $\mathrm{id}_X : X \to X$ の拡張であり, 一意性より id_{X^*} に一致する (命題 6.6). 同様にして $f \circ g = \mathrm{id}_{X^{**}}$ であり f は全単射. また稠密な部分集合 X 上で $d^{**}(f(p), f(p')) = d^*(p, p')$ が成り立つことから f は等長写像である.

次に完備化の存在を示す. $\mathfrak{X}$ で X のコーシー点列の全体のなす集合を表し, $x = \{p_n\}, x' = \{p'_n\} \in \mathfrak{X}$ に対し

$$d^*(x, x') = \lim_{n \to \infty} d(p_n, p'_n)$$

と定義する. 三角不等式より $d(p_n, p'_n) \leq d(p_n, p_m) + d(p_m, p'_m) + d(p'_m, p'_n)$, したがって $|d(p_n, p'_n) - d(p_m, p'_m)| \leq d(p_n, p_m) + d(p'_n, p'_m)$ が成り立つから, 右辺の数列は収束する. この定義のもとで $d^*(x, x') \geq 0$, $d^*(x, x) = 0$, $d^*(x, x') = d^*(x', x)$ が成り立ち, また d の三角不等式から d^* の三角不等式が導かれるから d^* は $\mathfrak{X}$ 上の準距離関数である. これより $d^*(x, y) = 0$ によって定まる同値関係 $\sim$ による商空間 $X^* = \mathfrak{X}/\sim$ は, 自然に定まる d^* によって距離空間をなす (定理 2.14, p.99). 次に $\iota : X \to X^*$ を, $p \in X$ に対し $p_n = p$ で与えられるコーシー列 $\{p_n\}$ の定める類を対応させる写像とすれば, これは等長であり, その像 $\iota(X)$ は X^* で稠密となる. あとはこの距離空間 (X^*, d^*) が完備であることを示せばよい. 距離空間 X^* のコーシー点列 $\{x_k\}$ をとる. 各 $x_k \in X^*$ の代表元, すなわち x_k を表す X の点列を $\{p_{kn}\}_{n=1,2,\cdots}$ とする. $\{p_{kn}\}$ がコーシー列であることから, 自然数 $n(k)$ が存在して $n, n' \geq n(k)$ のとき $d(p_{kn}, p_{kn'}) < 1/k$ が成立する. この $n(k)$ によって定まる X の点列 $\{p_{kn(k)}\}$ を考えよう. まず $\{p_{kn(k)}\}$ がコーシー列であることを示す. 任意の正数 ε をとるとき, X^* の点列 $\{x_k\}$ がコーシー列

であることから, K を大きくとれば $k, k' \geq K$ に対して $d^*(x_k, x_{k'}) < \varepsilon$ が成り立つ. 必要ならば K を取り替えて $1/K < \varepsilon$ とする. 距離 d^* の定義から $k, k' \geq K$ に対し, 十分大きい n をとれば $d(p_{kn}, p_{k'n}) < \varepsilon$ が成り立つから

$$d(p_{kn(k)}, p_{k'n(k')}) \leq d(p_{kn(k)}, p_{kn}) + d(p_{kn}, p_{k'n}) + d(p_{k'n(k')}, p_{k'n}) < 3\varepsilon \ .$$

よって $\{p_{kn(k)}\}$ はコーシー列である. 次にもとの点列 $\{x_k\}$ がこの点列 $\{p_{kn(k)}\}$ の表す類 $x \in X^*$ に収束することを示す. 実際 $k \geq K$ に対し $k' \geq n(k), K$ ととれば

$$d(p_{kk'}, p_{k'n(k')}) \leq d(p_{kk'}, p_{kn(k)}) + d(p_{kn(k)}, p_{k'n(k')}) < 4\varepsilon$$

より $d^*(x_k, x_\infty) \leq 4\varepsilon$ が成り立ち, 点列 $\{x_k\}$ は距離 d^* に関して $x_\infty \in X^*$ に収束する. すなわち距離空間 (X^*, d^*) は完備である. ■

この定理によって距離空間の完備化が一意であることが示されたから, 特にユークリッド空間, あるいは一般に完備距離空間の部分集合 A を部分距離空間と見なしたとき, その完備化が A の閉包 $\overline{A}$ と一致することがわかる. 例えば有理数全体のなす空間 $\boldsymbol{Q}$ の通常の距離に関する完備化は実数空間 $\boldsymbol{R}$ となる.

■ **例 6.4** ■ ***p* 進整数**　(参照例 1.6, p.7)

整数の全体 $\boldsymbol{Z}$ の p 進距離 d_p による完備化を求めよう. 整数 n を p で割ったときの余りを n_0, 次に $\dfrac{n-n_0}{p}$ を p で割ったときの余りを $n_1, \cdots$ と順次 n_i, $0 \leq n_i \leq p-1$ を決めていく. この操作を n_ℓ で打ち切れば $n = n_0 + n_1 p + \cdots + n_\ell p^\ell + n'_{\ell+1} p^{\ell+1}$ となる $n'_{\ell+1} \in \boldsymbol{Z}$ が存在するが, 最後の項の p 進付値の値は $v_p(n'_{\ell+1} p^{\ell+1}) \leq a^{-\ell-1}$ を満たすから, 距離 d_p に関する収束の意味で

$$n \ = \ n_0 + n_1 p + \cdots + n_\ell p^\ell + \cdots, \qquad 0 \leq n_i \leq p-1$$

が成り立つ. 二つの整数 n, m をこのように $n = \sum n_i p^i$, $m = \sum m_i p^i$ と展開するとき, $d_p(n, m) \leq a^{-\ell}$ となる条件は $n_i = m_i$, $0 \leq i \leq \ell - 1$ で与えられるから, 形式的な展開 $\sum_{i=0}^{\infty} n_i p^i$, $0 \leq n_i \leq p-1$ の全体を $\boldsymbol{Z}_p$ とおき, $n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i p^i$, $m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i p^i$ の距離を $d_p(n, m) = \sup_{n_i \neq m_i} a^{-i}$ で定めれば, これは自然に $(\boldsymbol{Z}, d_p)$ を部分距離空間として含む. この $\boldsymbol{Z}_p$ を ***p* 進整数環**, $\boldsymbol{Z}_p$ の元を ***p* 進整数**と呼ぶ. さて $\{n^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$ を $\boldsymbol{Z}_p$ のコーシー列とすれば, 距離の定義より, $n^{(k)}$ の p^i の係数

$n_i^{(k)}$ は十分大きい k について一定となる. この一定値 n_i を用いて $\sum_{i=0}^{\infty} n_i p^i$ と表される $\boldsymbol{Z}_p$ の元に $\{n^{(k)}\}$ が収束することは容易にわかるから, 距離空間 $(\boldsymbol{Z}_p, d_p)$ は完備で, したがって $\boldsymbol{Z}$ の d_p に関する完備化となっている. □

6.1.3 コンパクト性と完備性

距離空間におけるコンパクト性は点列コンパクトと同値であり, これも完備性と同じく点列に関する性質である. この両者については以下の関係がある.

【命題 6.8】 コンパクト距離空間は完備である.

証明 X をコンパクト距離空間, $\{x_n\}$ をそのコーシー列とする. X は点列コンパクトであったから $\{x_n\}$ は収束部分列をもつ. その極限を x_∞ と書くと, 任意の n に対して $n' \geq n$ であって $x_{n'}$ がこの部分列に属するものが存在するから

$$d(x_n, x_\infty) \ \leq \ d(x_n, x_{n'}) + d(x_{n'}, x_\infty) \ \to \ 0 \ .$$

したがってもとの点列も同じ極限 x_∞ に収束する. ■

【定理 6.9】 距離空間がコンパクトであるための必要十分条件は完備かつ全有界であること.

証明 X を距離空間とする. X が全有界であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限個の ε-球で X を覆うことができることをいい, コンパクト距離空間は常に全有界であった (p.142). したがって命題 6.8 よりコンパクト距離空間は完備かつ全有界である. 逆に X が完備かつ全有界であるとし, $\{x_n\}$ を X の点列とする. X は全有界であったから, 任意の自然数 k に対し, 有限個の $1/k$-開球よりなる X の被覆が存在する. 特に $k=1$ とし $U(p_i;1)$, $i=1,\cdots,N$ が X を覆うとすれば, 点列 $\{x_n\}$ のうちの無限個がどれか一つの $U(p_i;1)$ に属する (ディリクレの抽出し論法). よって $\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{1m}\}_{m=1,2,\cdots}$ であって $d(x_{1m}, x_{1m'}) \leq 2$ を満たすものが存在する. 次に $k=2$ とし, X を有限個の 1/2-球で覆い, 同じ議論を $\{x_{1m}\}$ に対して適用すれば, $\{x_{1m}\}$ の部分列 $\{x_{2m}\}_{m=1,2,\cdots}$ であって $d(x_{1m}, x_{1m'}) \leq 2/2$ を満たすものが存在する. この議論を繰り返して部分点列

$\{x_{km}\}_{m=1,2,\cdots}$ の列 $k=1,2,\cdots$ を構成する．このとき対角線上にある点列 $\{x_{nn}\}$ はもとの点列の部分列で，また構成方法より $n\geq k$ の部分は $\{x_{km}\}$ の部分列であるから

$$n,n'\geq k \quad \text{ならば} \quad d(x_{nn},x_{n'n'})<\frac{2}{k}$$

が成立する．したがって $\{x_{nn}\}_{n=1,2,\cdots}$ はコーシー列であり，X の完備性より収束する．任意の点列が収束部分列をもつから X はコンパクトである．■

■ 例 6.5* ■ ハウスドルフ距離　(参照例 4.18, p.141)

距離空間 X の空でないコンパクト部分集合全体のなす空間 $\mathcal{K}(X)$ 上には

$$d_H(A,B) = \sup_{a\in A}\bar{d}(a,B)+\sup_{b\in B}\bar{d}(b,A), \qquad \bar{d}(a,B)=\sup_{b\in B}d(a,b)$$

によってハウスドルフの距離 d_H が定義されていたが，もとの距離空間 X が完備であるとき，距離空間 $(\mathcal{K}(X),d_H)$ も完備となる．これを証明しよう．コンパクト部分空間の列 $\{A_n\}$ がハウスドルフ距離 d_H に関するコーシー列であるとき，$\{A_n\}$ が $A=\bigcap_k\overline{\bigcup_{n\geq k}A_n}$ に収束することを示す．$\varepsilon>0$ に対して自然数 $N(\varepsilon)$ が存在して，$n,m\geq N(\varepsilon)$ のとき $d_H(A_n,A_m)<\varepsilon$ となる．よって $N\geq N(\varepsilon)$ に対して $\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n\subset U(A_N;\varepsilon)$ であり，特に $A\subset U(A_N;2\varepsilon)$ が成立する．ただし $U(A_N;\varepsilon)$ は A_N の ε-近傍 $\{x\in X;\bar{d}(x,B)<\varepsilon\}$ を表す．さて A_N はコンパクト，したがって全有界であるから，有限個の点 $x_1,\cdots,x_m$ を選んで $A_N\subset\bigcup U(x_i;\varepsilon)$ とできる．このとき各 $U(x_i;\varepsilon)$ を x_i の 3ε-近傍に取り替えれば，和 $\bigcup U(x_i;3\varepsilon)$ は $U(A_N;2\varepsilon)$ を，したがって A を含む(図 6.2)．ε は任意であったからこれは A

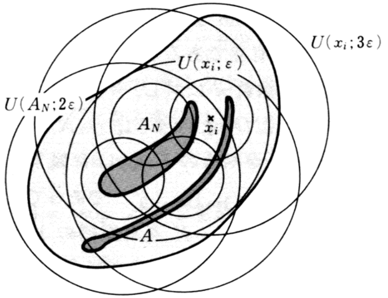


図 6.2

が全有界であることを示している．一方 A は閉集合の共通部分であるから閉集合で，したがって完備である．よってコンパクト性の特徴づけより A はコンパクト．次にやはり $N \geq N(\varepsilon)$ と仮定し，A_N から任意に点 $a=a_0$ を選ぶ．$n \geq N(\varepsilon)$ に対し $d_H(A_N, A_n)<\varepsilon$ であったから，$n=N(\varepsilon/2)$ ととることにより $d(a_1, a_0)<\varepsilon$ なる点 $a_1 \in A_{N(\varepsilon/2)}$ が存在する．同様に $d(a_2, a_1)<\varepsilon/2$ なる点 $a_2 \in A_{N(\varepsilon/2^2)}$ が存在する．これを繰り返せば，点列 $\{a_m\}$ であって $d(a_m, a_{m-1})<\varepsilon/2^{m-1}$ および $a_m \in A_{N(\varepsilon/2^m)}$ を満たすものをとることができる．この点列はコーシー列であるから極限 a_∞ をもつが，$d(a, a_m) \leq d(a, a_1)+\cdots+d(a_{m-1}, a_m)<2\varepsilon$ より $d(a, a_\infty) \leq 2\varepsilon$ であり，また $\{a_m, a_{m+1}, \cdots\} \subset \bigcup_{n=N(\varepsilon/2^m)}^{\infty} A_n$ より $a_\infty \in A$ であるから $\bar{d}(a, A) \leq 2\varepsilon$．特に A は空集合ではない．以上より A は空でないコンパクト集合，したがって $A \in \mathcal{K}(X)$ であり，かつ $N \geq N(\varepsilon)$ に対して $d_H(A_N, A)=\sup_{a \in A_N} \bar{d}(a, A)+\inf\{r; A \subset U(A_N; r)\} \leq 4\varepsilon$．これはコンパクト部分集合の列 $\{A_n\}$ が距離 d_H に関して A に収束することを示している．

さらにもとの空間 X がコンパクトであれば，空間 $\mathcal{K}(X)$ もコンパクトとなる．これを示すには $\mathcal{K}(X)$ が距離 d_H に関して全有界であることをいえばよい．任意の $\varepsilon>0$ に対し，X が全有界であることから X の有限部分集合 B で，その元を中心とする ε-開球の族 $\{U(p;\varepsilon)\}_{p \in B}$ が X を覆うものが存在する．さて $K \in \mathcal{K}(X)$ に対し，B の部分集合 B' を K からの距離が ε 未満であるような元の全体とする．$K \neq \emptyset$ より B' は空ではなく，また B が有限集合であることから B' は X のコンパクトな部分集合である．すなわち $B' \in \mathcal{K}(X)$．定義より $\sup_{p \in B'} \bar{d}(p, K)<\varepsilon$ であるが，一方で $K \subset \bigcup_{p \in B'} U(p;\varepsilon)$ より $\sup_{x \in K} \bar{d}(x, B')<\varepsilon$ が成り立ち，したがって $d_H(K, B')<2\varepsilon$ である．このような部分集合 $B' \subset B$ は有限個で，ε は任意であったから，$\mathcal{K}(X)$ が全有界であることが示された． □

6.1.4 完備性の応用

この項では縮小写像定理とベールのカテゴリー定理を述べる．いずれも完備距離空間において与えられた性質をもつ元の存在を保証する結果であり，各種の存在証明においてしばしば用いられる．

【定理 6.10（縮小写像定理）】 X を完備距離空間，$\varphi: X \to X$ を X から自分自身への写像とする．定数 $0<\lambda<1$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して

$d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq \lambda d(x,y)$ が成立するならば φ は X にただ一つの固定点, すなわち $\varphi(x)=x$ を満たす点 $x \in X$ をもつ.

証明　まず一意性を示す. x, x' がともに φ の固定点ならば $d(x,x') = d(\varphi(x),\varphi(x')) \leq \lambda d(x,x')$ より $d(x,x')=0$. したがって $x=x'$ である. 次に存在を示す. 任意に $x_0 \in X$ を選び, この x_0 から $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって帰納的に点列 $\{x_n\}$ を定義する. $a=d(x_0,x_1)$ とおけば $d(x_n,x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1},x_n) \leq \cdots \leq \lambda^n d(x_0,x_1)=\lambda^n a$ より, $n \leq m$ に対して

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1})+\cdots+d(x_{m-1},x_m) \\ &\leq \lambda^n a+\lambda^{n+1}a+\cdots+\lambda^{m-1}a \leq \frac{a}{1-\lambda}\lambda^n . \end{aligned}$$

これより点列 $\{x_n\}$ はコーシー列であり, X の完備性より収束する. その極限を x_∞ とおき, 等式 $\varphi(x_n)=x_{n+1}$ において $n \to \infty$ とすれば, φ の連続性より $\varphi(x_\infty)=x_\infty$. すなわち $x_\infty \in X$ は φ の固定点である. ■

定理の仮定を満たす写像を**縮小写像**と呼ぶ. その条件, すなわち 1 より真に小さい λ による評価 $d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq \lambda d(x,y)$ を, 単なる不等式 $d(\varphi(x),\varphi(y)) < d(x,y)$ で置き換えることはできない. 例えば完備距離空間として実数の半開区間 $X=[1,\infty)$ をとり, 写像 $\varphi: X \to X$ を $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{x}$ で定義すれば, この φ は $|\varphi(x)-\varphi(y)|=\left|1-\dfrac{1}{xy}\right||x-y|<|x-y|$ を満たすけれども固定点をもたない.

■ 例 6.6 ■　ニュートン法

多項式の実根, あるいは一般に関数の零点の近似値を具体的に求める方法として**ニュートン法**が知られている. 一変数の実数値関数 $f(x)$ が与えられたとき, 定義域の x に対し, 関数 $f(x)$ のグラフ $y=f(x)$ の $(x,f(x))$ での接線と x-軸との交点の x-座標を $T(x)$ とおく (図 6.3). すなわち $T(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. このとき $f(x)=0$ と $T(x)=x$ は同値であるから, 関数 $f(x)$ の零点を求める問題が, 写像 T の不動点を求める問題に帰着される. 写像 T の導関数は $T'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ で与えられるから, α が $f(x)$ の零点で $f'(\alpha)\neq 0$ である場合, $T'(\alpha)=0$ より T は

ニュートン: Sir Isaac Newton, 1642-1727.

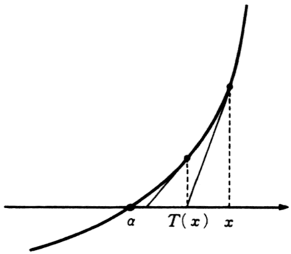


図 6.3　ニュートン法

α を含む適当な区間上縮小写像となる．したがってこの区間に属する任意の x について，数列 $\{T^n(x)\}$ は零点 α に収束する．しかもこの場合，α に近づくにつれて縮小率が小さくなるので，収束はかなり速い．零点 α において $f'(\alpha)=0$ となる場合であっても，接触が有限次，すなわち $f(x)=a(x-\alpha)^k+O(x-\alpha)^{k+1}$, $a\neq 0$, $k\geq 2$ なる展開が成立すれば，$T'(x)=\dfrac{a(x-\alpha)^k ak(k-1)(x-\alpha)^{k-2}}{a^2k^2(x-\alpha)^{2k-2}}+O(x-\alpha)$ より $T'(\alpha)=\dfrac{k-1}{k}$．よってこの場合も T は α を含む適当な区間において縮小写像であり，数列 $\{T^n(x)\}$ が α に収束する． □

縮小写像定理は，一つしかない対象を見つけるための道具であるが，逆にたくさんあるものを見つける際に有効となるのが次に述べるカテゴリー定理である．

【定理 6.11（ベールのカテゴリー定理）】　完備距離空間はベール空間である．

証明　X を完備距離空間，O_n, $n=1,2,\cdots$ を X の稠密な開部分集合の可算族とするとき，共通部分 $\bigcap O_n$ が X で稠密となることをいえばよい．X の点 p および正の数 ε を任意にとるとき，p の ε-近傍に $\bigcap O_n$ の点が存在することをいえばよい．そのために X の点列 $\{x_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ と正数の列 $\{\varepsilon_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を以下の手順で構成する．まず $x_0=p$, $\varepsilon_0=\varepsilon$ とおく．さて O_1 の稠密性から $d(p,x_1)<\varepsilon/2$ なる $x_1\in O_1$ が存在する．O_1 は開集合であったから $\varepsilon_1>0$ を，x_1 の ε_1-近傍 $U(x_1;\varepsilon_1)$ が O_1 に含まれるようにとることができるが，さらに ε_1 は $\varepsilon_1<\varepsilon/2$ を満たすとしてよい．次に O_2 の稠密性より $d(x_1,x_2)<\varepsilon_1/2$ なる $x_2\in O_2$ が存在するから，$\varepsilon_2>0$ を $U(x_2;\varepsilon_2)\subset O_2$ および $\varepsilon_2<\varepsilon_1/2$ を満たすようにとる（図

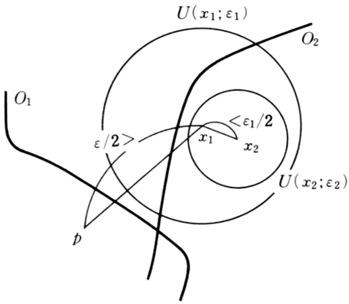


図 6.4

6.4). これを繰り返して X の点列 $\{x_n\}$ を構成すると, $\{x_n\}$ は

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1})+\cdots+d(x_{m-1},x_m) \\ &< \varepsilon_n/2+\varepsilon_{n+1}/2+\cdots+\varepsilon_{m-1}/2 < \varepsilon_n < \varepsilon/2^n \end{aligned}$$

を満たすからコーシー列であり, X の完備性より収束する. またその極限を x_∞ とおくと, 各 n に対して $d(x_n,x_\infty)<\varepsilon_n$ が成立する. O_n が x_n の ε_n-近傍を含むことから $x_\infty \in O_n$ で, したがって $x_\infty \in \bigcap O_n$ である. 一方で $x_\infty \in U(p,\varepsilon)$ であったから, 点 p の ε-近傍が $\bigcap O_n$ の点を含むことが示された. ■

<まとめ>　距離空間におけるコーシー列と完備性について定義を与え, ユークリッド空間が完備であること, 完備性と一様連続写像の関係, 与えられた距離空間の完備化, コンパクト性が完備かつ全有界と同値であることなどを述べた. 最後に縮小写像定理とベールのカテゴリー定理に触れたが, これらを応用するおもな対象は, 次の 6.2 節で扱う関数空間である.

[例題]　平面上の半径が正の閉円板全体のなす集合を X, その距離を $d(A,B)=m(A\ominus B)$ とするとき, 距離空間 (X,d) の完備化を求めよ (参照 1.1 節例題, p.23).

(解)　円板 $A\in X$ の中心を $c(A)\in \boldsymbol{R}^2$, 半径を $r(A)\in(0,\infty)$ と書くとき, 対応 $A\mapsto(c(A),r(A))$ によって X は $\boldsymbol{R}^2\times(0,\infty)$ と同相であった. この座標

を用いて X のコーシー列を記述しよう．まず $d(A,B) \geq \pi|r(A)-r(B)|^2$ より，X の点列 $\{A_n\}$ がコーシー列であれば $\{r(A_n)\}$ は実数列としてコーシー列であり，よって収束する．その極限 r_∞ が 0 であるかどうかで場合を分ける．$r_\infty > 0$ のときには，$r(A), r(B) > r_\infty/2$ に対して $d(A,B) \geq \pi r_\infty^2/2$ あるいは $d(A,B) \geq \pi\|c(A)-c(B)\|^2/4$ のいずれかが成り立つから，$\{c(A_n)\}$ もコーシー列となる．極限を c_∞ とすれば，もとのコーシー列 $\{A_n\}$ は中心が c_∞ で半径が r_∞ の円板に収束する．一方 $r_\infty=0$ のときには $\{A_n\}$ は X の点には収束しないから，完備化のために極限を X につけ加える必要がある．$\{A_n\}, \{B_n\}$ がともにこのようなコーシー列であれば，$d(A_n, B_n) \leq \pi(r(A_n)^2+r(B_n)^2)$ より，これらは同値である．したがって完備化のために X につけ加える点は半径 0 の円板に対応する一点のみでよい．これを $*$ と書けば，X の完備化は $X \cup \{*\}$ で，つけ加えた点 $*$ と $A \in X$ との距離は $d(A,*)=m(A)$ で与えられる． ■

6.2 関 数 空 間

コンパクト空間上の連続関数のなす空間が主眼である．この空間が一様ノルムに関して完備であること，その応用として連続関数の族が収束列を含むための十分条件を述べる．そのほか，連続関数の多項式による近似，広義一様収束，最後に病的な関数あるいは曲線としてよく例示されるワイエルシュトラスの関数，ペアノ曲線，コッホ曲線について解説する．関数空間の p 次ノルムによる完備化も重要な話題であるが，ルベーグ積分に関する予備知識が必要であるので割愛した．興味ある読者はこの分野の教科書 [1],[12] を参照されたい．

6.2.1 バナッハ空間

関数空間を扱う準備としてバナッハ空間を定義する．ノルム空間 $(V, \|\ \|)$ は $d(u,v)=\|u-v\|$ で定義される距離によって距離空間とみなされるのであったが，この距離が完備であるとき，$(V, \|\ \|)$ あるいは V を**バナッハ空間**と呼ぶ．

■ 例 6.7 ■ ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ （参照例 6.1, p.188）

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ はユークリッドのノルム $\|\ \|$ によって定義された距離に

バナッハ: Stefan Banach, 1892-1945.

ついて完備であるから, このノルムに関してバナッハ空間をなす. また有限次元線形空間のノルムはすべて同値であったから (例 4.13, p.135), 有限次元ノルム空間はすべてバナッハ空間である. □

■ **例 6.8** ■ **連続関数のなす空間** $C[0,1]$ (参照例 1.4, p.6)

区間 $[0,1]$ 上の連続関数の全体 $C[0,1]$ は, 次の項で述べるように一様ノルム $\| \ \|_\infty$ に関してはバナッハ空間となるが (系 6.14, p.205), その他のノルム $\| \ \|_p$, $1 \le p < \infty$ についてはバナッハ空間とはならない. 例えば $p = 1$ に対して

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ n\left(t - \dfrac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

で定義される関数列 $\{f_n\}$ を考えれば (図 6.5), $\|f_n - f_m\|_1 = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|$ よりこれはコーシー列であり, 各点収束の意味で

$$f_\infty(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

に収束する. しかし f_∞ は $t = \dfrac{1}{2}$ で連続ではないので, 空間 $C[0,1]$ においては極限は存在しない. 厳密には次のとおりである. 関数列 $\{f_n\}$ が $C[0,1]$ において収束極限 f をもつとする. このとき $a = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおけば, 同時に $a=0$ および $a=1$ が成立することはない. いま $a \neq 0$ とし, f の連続性から, $\dfrac{1}{2} - \delta \le t \le \dfrac{1}{2}$ に対して $|f(t)| \ge \dfrac{1}{2}|a|$ が成り立つような δ をとる. そうすると $\|f_n - f\|_1 \ge \displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(t)|dt \ge \dfrac{1}{2}|a|\left(\delta - \dfrac{1}{n}\right)$ より, $\{f_n\}$ は f には収束しない. $a \neq 1$

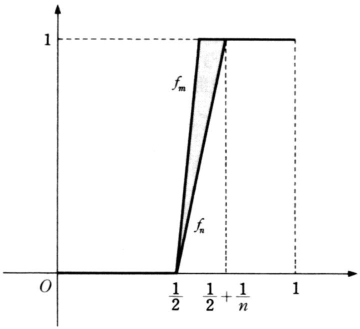


図 6.5

の場合も同様に $\{f_n\}$ は f に収束しないから矛盾が生じる. □

■ 例 6.9* ■ 数列空間 ℓ^2 (参照例 1.5, p.6)
数列空間 ℓ^2 はノルム $\|\ \|_2$ に関して完備であり, したがってバナッハ空間となる. 実際 $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$, $x_n=(x_{nk})$ を $\|\ \|_2$ に関するコーシー列とする. このとき $|x_{nk}-x_{mk}|\leq\|x_n-x_m\|_2$ より $\{x_{nk}\}_{n=1,2,\cdots}$ は実数のコーシー列であり, 収束極限 $x_{\infty k}$ をもつ. この数列 $x_\infty=(x_{\infty k})$ が ℓ^2 に属し, かつ $\{x_n\}$ の極限であることを証明しよう. 任意の $\varepsilon>0$ に対して適当な N を選べば, $n,m\geq N$ のとき $\|x_n-x_m\|_2<\varepsilon$, 特に $\sqrt{\sum_{k=1}^K(x_{nk}-x_{mk})^2}<\varepsilon$ が成り立つから, $m\to\infty$ の極限をとれば $\sqrt{\sum_{k=1}^K(x_{nk}-x_{\infty k})^2}\leq\varepsilon$. 自然数 K は任意であったから $\|x_n-x_\infty\|_2\leq\varepsilon$ が従うが, これは $x_\infty\in\ell^2$ および $x_n\to x_\infty$ を導く. □

6.2.2 連続関数の空間

前項の例 6.8 (p.202) で述べたように, 閉区間上の連続関数の全体 $C[0,1]$ に p 次ノルム, $p\neq\infty$ を入れた空間は完備ではない. しかし一様ノルム

$$\|f\|=\|f\|_\infty=\sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)|$$

を採用した場合には完備であり, したがって連続関数の全体はバナッハ空間となる. 以下距離空間上の連続関数の全体についてこの事実を述べるが, 簡便のため習慣上の記号 $\|\ \|=\|\ \|_\infty$ を用いる.

残念ながら一般の位相空間 X 上の連続関数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ に対しては, 常に $\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$ が定義されるわけではない. したがって X 上の連続関数の全体 $C(X)$ の代わりに有界連続関数全体の空間

$$B(X)=\{f\in C(X);\ \sup_{x\in X}|f(x)|<\infty\}$$

を考え, $B(X)$ の元に対して**一様ノルム**を次で定義する.

$$\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

このノルム $\|\ \|$ に関する収束が**一様収束**である.

【定理 6.12】 ノルム空間 $(B(X), \| \ \|)$ は完備で, したがってバナッハ空間である.

証明 有界連続関数数列 $\{f_n\}$ がノルム $\| \ \|$ に関してコーシー列であるとする. このとき各点 $x \in X$ に対して

$$|f_n(x) - f_m(x)| \ \leq \ \|f_n - f_m\|$$

が成立するから, 数列 $\{f_n(x)\}$ はコーシー列である. したがって実数の完備性より各点ごとの極限 $\lim f_n(x)$ が存在するから, これを $f(x)$ とおく. 関数列 $\{f_n\}$ がコーシー列であることから, 任意の $\varepsilon>$ に対して自然数 N が存在して $n, m \geq N$ ならば $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| = \|f_n - f_m\| < \varepsilon$ が成り立つ. この式において $m \to \infty$ とすれば $n \geq N$ に対して $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ であるから, もし f が有界かつ連続, すなわち $f \in B(X)$ であれば, ノルム $\| \ \|$ に関して $f_n \to f$ なることがわかる. まず $n, m \geq N$ に対し

$$|f_m(x)| \ \leq \ |f_n(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| \ \leq \ \|f_n\| + \|f_m - f_n\| \ < \ \|f_n\| + \varepsilon$$

より, $m \to \infty$ とすれば $\sup |f(x)| \leq \|f_n\| + \varepsilon$ となるから極限関数 $f(x)$ は有界. 次に関数 f_N の連続性より, 各 $x_0 \in X$ の近傍 U を, $x \in U$ ならば $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ が成り立つようにとることができる. このとき

$$|f(x) - f(x_0)| \ \leq \ |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \ < \ 3\varepsilon$$

であり, これは極限関数 $f : X \to \boldsymbol{R}$ が $x_0 \in X$ で連続であることを示している. 以上で $(B(X), \| \ \|)$ が完備なることが示された. ■

【系 6.13】 位相空間 X 上の有界連続関数の列 $\{f_n\}$ に対して, 非負数列 $\{a_n\}$ であって $\|f_n\| \leq a_n$ を満たし, かつ級数 $\sum a_n$ が収束するものが存在すれば, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は X 上一様収束する.

定理 6.12 は通常, **連続関数列の一様収束極限は連続である**といい表される. 一般の位相空間の場合には連続関数は必ずしも有界ではないが, コンパクトな空間に対しては最大値の定理 (p.132) によって, その上の連続関数は常に有界である. したがって X がコンパクト空間であれば $B(X)$ は $C(X)$ に一致する.

【系 6.14】 コンパクト空間 X に対して，その上の連続関数の全体のなす空間 $C(X)$ は一様ノルムに関してバナッハ空間をなす．

関数方程式が与えられた場合，近似解の族を考え，そこから収束列を取り出して極限を考察することによりもとの方程式の解を求めるという一般的手法がある．その際に有効となるのが次に述べるアスコリ-アルツェラの定理である．

位相空間 X 上の関数族 $\mathfrak{F}=\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**一様有界**であるとは，定数 c が存在して，任意の $x\in X$ および $\lambda\in\Lambda$ に対して

$$|f_\lambda(x)| \le c$$

が成り立つことをいう．言い換えれば各 λ に対して $f_\lambda\in B(X)$ であり，かつ $\|f_\lambda\|\le c$ となること．また $\mathfrak{F}$ が点 $x_0\in X$ において**同程度連続**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して x_0 の近傍 U を選んで，$\lambda\in\Lambda$ にかかわらず $x\in U$ ならば $|f_\lambda(x)-f_\lambda(x_0)|<\varepsilon$ が成立するようにできることをいう．定義域の各点において同程度連続な関数族を単に**同程度連続**という．

【定理 6.15 (アスコリ-アルツェラの定理)】 コンパクト空間 X 上の連続関数の族 $\mathfrak{F}=\{f_\lambda\}$ がバナッハ空間 $C(X)$ で相対コンパクトであるための必要十分条件は，この $\mathfrak{F}$ が一様有界かつ同程度連続であること．特にコンパクト空間上の一様有界かつ同程度連続なる連続関数族は一様収束する部分列を含む．

証明　完備距離空間の部分集合に対しては，その閉包が完備であることから，相対コンパクト性と全有界性が同値となる (定理 6.9, p.195)．したがって $\mathfrak{F}$ が全有界なることと，一様有界かつ同程度連続なることが同値であることを示せばよい．まず $\mathfrak{F}$ が全有界と仮定する．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\mathfrak{F}$ を覆う有限個の ε-球が存在するから，これを $U(f_i;\varepsilon)$, $i=1,2,\cdots,N$ とおく．各 $U(f_i;\varepsilon)$ に属する関数 f については $\|f\|\le\|f-f_i\|+\|f_i\|<\|f_i\|+\varepsilon$ が成り立つ．したがって $c=\max\{\|f_i\|\}+\varepsilon$ とおけば，任意の $f_\lambda\in\mathfrak{F}$ は $\|f_\lambda\|<c$ を満たす．すなわち $\mathfrak{F}$ は一様有界である．次に X の点 x_0 を一つ決め，その近傍 U を，各 $f_i : X\to\boldsymbol{R}$ に対し $x\in U$ ならば $|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon$ が成立するようにとる．これは f_i が有限個であることと各 f_i

---

アスコリ: Giulio Ascoli, 1843-1896.
アルツェラ: Cesare Arzelà, 1847-1912.

の連続性より可能である．このとき任意の $f_\lambda \in \mathfrak{F}$ に対し $f_\lambda \in U(f_i;\varepsilon)$ なる f_i が存在することから，

$$|f_\lambda(x)-f_\lambda(x_0)| \le |f_\lambda(x)-f_i(x)|+|f_i(x)-f_i(x_0)|+|f_i(x_0)-f_\lambda(x_0)| \le 3\varepsilon .$$

これは $\mathfrak{F}$ が同程度連続であることを示している．

逆に $\mathfrak{F}$ が一様有界かつ同程度連続であると仮定する．任意の $\varepsilon>0$ をとる．$\mathfrak{F}$ の同程度連続性より，各点 $x\in X$ の開近傍 V_x であって，すべての λ について $x'\in V_x$ のとき $|f_\lambda(x')-f_\lambda(x)|<\varepsilon$ が成立するものが存在する．このような V_x の全体はコンパクト空間 X の開被覆をなすから，有限個の $x_1,\cdots,x_M$ を選び，任意の $x\in X$ はどれかの V_{x_i} に含まれるようにできる．写像 ev : $C(X)\to \boldsymbol{R}^M$ を，$x_1,\cdots,x_M$ を用いて $\mathrm{ev}(f)=(f(x_i))$ で定義すると，$\mathfrak{F}=\{f_\lambda\}$ の ev による像 $\mathrm{ev}(\mathfrak{F})$ は $\mathfrak{F}$ が一様有界であることから有界．ユークリッド空間においては有界なる部分集合は全有界だから，有限個の ε-球 $U_1,\cdots,U_L$ でこれを覆うことができる．各 U_j に対して $\mathrm{ev}(f_j)\in U_j$ なる $f_j\in\mathfrak{F}$ をとる．$\mathrm{ev}(\mathfrak{F})\cap U_j=\emptyset$ である添数 j は最初から外しておく．さて任意の $f_\lambda\in\mathfrak{F}$ に対してその像 $\mathrm{ev}(f_\lambda)$ を含む U_j が存在する．このとき各 $i=1,\cdots,M$ について $|f_\lambda(x_i)-f_j(x_i)|\le\|\mathrm{ev}(f_\lambda)-\mathrm{ev}(f_j)\|_{\boldsymbol{R}^M}<2\varepsilon$ が成り立つ．そうすると任意の $x\in X$ について $x\in V_{x_i}$ なる x_i が存在するから

$$|f_\lambda(x)-f_j(x)| \le |f_\lambda(x)-f_\lambda(x_i)|+|f_\lambda(x_i)-f_j(x_i)|+|f_j(x_i)-f_j(x)| < 5\varepsilon .$$

これは任意の $f_\lambda\in\mathfrak{F}$ がどれかの $U(f_j;5\varepsilon)$ に含まれることを示している．すなわち $\mathfrak{F}$ は全有界である．■

以上はコンパクト空間上の連続関数の空間についての議論であったが，一般に Y を距離空間とするとき，コンパクト空間 X から Y への連続写像の全体のなす集合 $C(X,Y)$ には $d(\varphi,\varphi')=\sup_{x\in X} d_Y(\varphi(x),\varphi'(x))$ によって距離が定義される．特に Y が距離空間として完備である場合，写像空間 $C(X,Y)$ もこの距離 d に関して完備となり，また Y がコンパクトならばアスコリ-アルツェラの定理も成立する．このとき一様有界の条件は最初から満たされていて，同程度連続性のみが条件となることに注意しよう．

■ 例 6.10* ■　コンパクト距離空間の等長変換群

(X,d_X) をコンパクト距離空間，$\mathrm{Isom}(X)$ を X の**等長変換群**，すなわち X か

ら自分自身への距離を保つ同相写像全体のなす群とする．このとき Isom(X) は距離 $d(\varphi,\varphi') = \sup_{x\in X} d_X(\varphi(x),\varphi'(x))$ に関してコンパクトな位相群となる．これを証明しよう．まず積をとる写像 $(\varphi,\psi)\mapsto\varphi\circ\psi$ は $d_X(\varphi\circ\psi(x),\varphi'\circ\psi'(x)) \leq d_X(\varphi\circ\psi(x),\varphi'\circ\psi(x)) + d_X(\varphi'\circ\psi(x),\varphi'\circ\psi'(x))$ より $d(\varphi\circ\psi,\varphi'\circ\psi') \leq d(\varphi,\varphi') + d(\psi,\psi')$ となって連続．次に逆元をとる写像 $\varphi\mapsto\varphi^{-1}$ は $d(\varphi^{-1},\psi^{-1}) = d(\varphi^{-1}\circ\psi\circ\psi^{-1},\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\psi^{-1}) \leq d(\psi,\varphi)$ よりやはり連続．したがって Isom(X) は距離 d に関して位相群をなす．Isom(X) がコンパクトであることを示すには，任意の点列 $\{\varphi_n\}$ が Isom(X) において収束する部分列 $\{\varphi_{n'}\}$ をもつことをいえばよい．まず各 φ_n が等長であることから $\{\varphi_n\}$ は同程度連続であり，X 上一様収束する部分列 $\{\varphi_{n'}\}$ を含む．その極限 φ_∞ はやはり距離 d_X を保つから単射である．もし φ_∞ が全射でなければ，$\varphi_\infty(X)$ がコンパクトであるから，これに含まれない点 y に対して $\varepsilon>0$ が存在して，$d_X(\varphi_\infty(x),y)>\varepsilon$ が任意の x に対して成立する．$\varphi_{n'}$ は X 上一様に φ_∞ に収束するから，十分大きい n' については $\varphi_{n'}$ の像も y を含まない．これは $\varphi_{n'}\in$ Isom(X) で，したがって $\varphi_{n'}$ が全射であることに反する．よって φ_∞ は全射であるが，そうすると φ_∞ はコンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射であるから同相写像となる．すなわち $\varphi_\infty\in$ Isom(X) で，これより Isom(X) はコンパクトである． □

6.2.3* 広義一様収束とコンパクト開位相

コンパクト空間 X 上の連続関数の空間 $C(X)$ の位相としては，通常は一様ノルムから定まるものを用いる．一方，空間がコンパクトでない場合，例えば実数空間 $\boldsymbol{R}$ などでは広義一様収束を考えることが多い．これは一様ノルムがすべての関数に対して定義できないことにもよるが，コンパクトでない空間においては一様性の要求が過大であることも理由の一つである．この位相を定式化しよう．

X を位相空間，$C(X)$ を X 上の連続関数全体の空間とし，関数 $f\in C(X)$ の基本近傍系 $\mathfrak{U}(f)$ を，X のコンパクト部分集合 K および $\varepsilon>0$ を用いて

$$U_K(f;\varepsilon) = \{g\in C(X);\ \sup_{x\in K}|g(x)-f(x)|<\varepsilon\}$$

と表される集合の全体とする．コンパクト集合 K 上では $\sup_{x\in K}|f(x)|$ は一様ノルムそのものであるから，$\mathfrak{U}(f)$ は基本近傍系の条件 (U_1^*)〜(U_5^*) を満たし，$C(X)$ に位相を定義する．この位相に関する収束を X 上の**広義一様収束**という．関数

列 $\{f_n\}$ が f に広義一様収束するとは, 任意のコンパクト部分集合上 $\{f_n\}$ が f に一様収束することであるが, 空間 X が局所コンパクトであれば, これは各点 $x \in X$ の適当な近傍上で $\{f_n\}$ が f に一様収束することと同値である.

■ 例 6.11 ■　テイラー展開

よく知られているように, 指数関数 e^x の $x=0$ を中心とする**テイラー展開**は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる. 右辺は級数であるから, 等式は関数列の収束を表しているが, この収束は広義一様収束である. 実際, 剰余項を含む形で $e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!}x^n + R_N$ と展開すれば $R_N = \frac{1}{N!}e^\xi$ なる ξ が 0 と x の間に存在する. x が閉区間 $[-K, K]$ を動くとき ξ も $-K \leq \xi \leq K$ を満たすから, $|R_N| \leq \frac{e^K}{n!}$ が成立し, $N \to \infty$ のとき R_N は一様に 0 に収束する. K は任意であったから, 上記のテイラー展開は広義一様収束の意味で正しいことがわかる. 一般にべき級数がその収束半径内で広義一様収束することはよく知られている (参照 [5]). □

広義一様収束と関連して, 一般の写像空間に位相を入れる方法を解説する. X, Y を位相空間, $C(X, Y)$ を X から Y への連続写像の全体とする. X のコンパクト部分集合 K および Y の開部分集合 U に対して $O_{K,U} = \{\varphi \in C(X, Y); \varphi(K) \subset U\}$ とおき, その全体 $\{O_{K,U}\}$ の生成する位相を $C(X, Y)$ の**コンパクト開位相**と呼ぶ.

【命題 6.16】　X を局所コンパクトなハウスドルフ空間, Y をハウスドルフ空間とする. このとき $C(X, Y)$ のコンパクト開位相は, 評価写像 $\mathrm{ev} : C(X, Y) \times X \to Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$ が連続となる位相のうち最も弱いものである.

証明　U を Y の開集合, $\mathrm{ev}(f, x) = f(x) \in U$ とすれば, f の連続性と X の局所コンパクト性より, x のコンパクトな近傍 N で $f(N) \subset U$ を満たすものが存在する. このとき $(f, x) \in O_{N,U} \times N \subset \mathrm{ev}^{-1}(U)$ であるから, コンパクト開位相のもとで $\mathrm{ev}^{-1}(U)$ は開集合であり, したがって ev は連続である. 逆に ev が連続で

テイラー: Brook Taylor, 1685-1731.

あるとしよう．任意の $f\in O_{K,U}$ および $x\in K$ に対し，f の $C(X,Y)$ での近傍 O_x と x のコンパクトな近傍 N_x で $\mathrm{ev}(O_x\times N_x)\subset U$ を満たすものが存在する．Kのコンパクト性より K は有限個の N_x で覆われるから，対応する O_x の共通部分を考えれば，これは $C(X,Y)$ における f の近傍でしかも $O_{K,U}$ に含まれる．したがって $O_{K,U}$ はこの位相に関しても開集合である． ■

【命題 6.17】 値域が実数空間である場合，$C(X,\boldsymbol{R})=C(X)$ のコンパクト開位相は広義一様収束の位相と一致する．

証明 $\boldsymbol{R}$ の開集合として開区間 $U=(a,b)$ をとる．$f\in O_{K,U}$ に対し，f の K での最小値を m，最大値を M とし，$b-M$ と $m-a$ の小さい方を ε とおけば，$U_K(f;\varepsilon)$ は $O_{K,U}$ に含まれる．したがって広義一様収束の位相はコンパクト開位相よりも強い．逆に $f:X\to\boldsymbol{R}$ を連続写像，$K\subset X$ をコンパクト部分集合とする．各 $x\in X$ の近傍 N_x を，任意の $x'\in N_x$ が $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ を満たすようにとるとき，コンパクト性より，このうちの有限個 $N_{x_1},\cdots,N_{x_k}$ で K を覆うことができる．このとき $U_i=(f(x_i)-\varepsilon,f(x_i)+\varepsilon)$ とおけば，$g\in O_{N_{x_i},U_i}$ のとき $x\in N_{x_i}$ に対して $|g(x)-f(x)|\leq|g(x)-f(x_i)|+|f(x)-f(x_i)|<2\varepsilon$ が成り立つ．これはコンパクト開位相が広義一様収束の位相よりも強いことを示している． ■

6.2.4* 近 似 定 理

与えられた連続関数を性質のよい関数で近似することは，応用上の重要な手法の一つである．例えば，関数のテイラー展開，フーリエ展開などがこれに当たる．一般の連続関数に対するものとしてはワイエルシュトラスの多項式近似定理が有名であるが，この結果はストーンによって以下のように拡張された．

$C(X)$ を位相空間 X 上の連続関数の全体とする．$C(X)$ は線形空間であるとともに積 $f\cdot g$, $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ が定義され，結合律 $(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)$，交換律 $f\cdot g=g\cdot f$，分配律 $(f+g)\cdot h=f\cdot h+g\cdot h$ を満足する．さらに $C(X)$ は乗法の単位元 1, $1(x)=1$ を含み，スカラー倍と積との間に $\lambda(f\cdot g)=(\lambda f)\cdot g$ が成立する．これを $C(X)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の，乗法の単位元 1 を含む**代数**である，あるいは**多元環**であるという．$C(X)$ の線形部分空間 H が**部分代数**であるとは，H がスカラー倍と乗法に関して閉じているときをいう．

【定理 6.18（ストーン-ワイエルシュトラス）】 X をコンパクト距離空間, $C(X)$ を X 上の連続関数の全体に一様ノルムを入れたバナッハ空間とする. $C(X)$ の部分代数 H が単位元 1 を含み, かつ X の任意の二点を分離する, すなわち $x \neq x' \in X$ に対して $f(x) \neq f(x')$ なる $f \in H$ が存在するならば, H は $C(X)$ で稠密である.

証明 まず $[0,1]$ 上の関数 $t \mapsto \sqrt{t}$ を近似する多項式を構成し, これを利用して $\overline{H}$ が絶対値をとる操作に関して閉じていることを示す. $u_0(t)=0$ から出発して

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n(t)^2)$$

によって帰納的に多項式列 $\{u_n(t)\}$ を定義する. $u_n(t) \leq \sqrt{t}$ を仮定すれば, $\dfrac{\sqrt{t}+u_n(t)}{2} \leq \sqrt{t} \leq 1$ であるから $\sqrt{t}-u_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t}-u_n(t)\right)\left(1-\dfrac{\sqrt{t}+u_n(t)}{2}\right)$ より $n+1$ についても $u_{n+1} \leq \sqrt{t}$ は正しい. よって $u_n \leq \sqrt{t}$ がすべての n について成り立つ. これより $\left|\sqrt{t}-u_{n+1}(t)\right| \leq \left|\sqrt{t}-u_n(t)\right| \cdot \left|1-\sqrt{t}\right|$, したがって $\left|\sqrt{t}-u_{n+1}(t)\right| \leq \sqrt{t}\left(1-\sqrt{t}\right)^n$ となるが, 右辺の $0 \leq t \leq 1$ における最大値は $\sqrt{t}=\dfrac{1}{n+1}$ のときの $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ であるから, 関数列 $\{u_n(t)\}$ は $[0,1]$ 上一様に $\sqrt{t}$ に収束する. さて部分代数 H に属する関数 $f \in H$ をとる. $a = \|f\|$ とおくとき, X 上の関数 $(f/a)^2$ は $0 \leq (f/a)^2 \leq 1$ を満たすから, $n \to \infty$ のとき $u_n((f/a)^2)$ は一様に $\sqrt{(f/a)^2} = |f/a|$ に収束する. したがって H の閉包 $\overline{H}$ は f の絶対値をとる関数 $|f|$ を含む. $f_n \to f$ のとき, 絶対値をとる関数についても $|f_n| \to |f|$ が成り立つから, $f \in \overline{H}$ に対しても $|f| \in \overline{H}$ が成り立つ. またこれを利用して $f, g \in \overline{H}$ に対して $\max\{f,g\} = (f+g+|f-g|)/2$, $\min\{f,g\} = (f+g-|f-g|)/2$ が $\overline{H}$ に属することもわかる. 同様に有限個の関数の最大, 最小も同じく $\overline{H}$ に属する.

さて任意の連続関数 $h \in C(X)$ に対して, これを $\overline{H}$ の元で近似しよう. まず任意の $x, y \in X$, $x \neq y$ および $a, b \in \boldsymbol{R}$ に対し, $f(x) = a$, $f(y) = b$ を満たす $f \in H$ が存在することを示す. 二点 x, y を分離する $f' \in H$ をとり, $a' = f'(a)$, $b' = f'(y)$ とおく. この f' を用いて $f(x) = a + \dfrac{b-a}{b'-a'}(f'(x)-a')$ と定義される f

が条件を満たす．次に任意の $\varepsilon>0$ および $x_0\in X$ を決めるとき，$f(x_0)=h(x_0)$ および $f(x)<h(x)+\varepsilon$ を同時に満たす $f\in\overline{H}$ の存在を示す．各 $y\in X$ に対して $f_y(x_0)=h(x_0)$, $f_y(y)=h(y)$ なる $f_y\in H$ をとる．ただし $y=x_0$ に対しては f_{x_0} として定数関数 $x\mapsto f(x_0)$ をとる．このとき各 $y\in X$ の開近傍 U_y であって $X\in U_y$ のとき $f_y(x)<h(x)+\varepsilon$ が成り立つものがある．このような U_y の全体は X の開被覆となるから，有限個の $U_{y_1},\cdots,U_{y_k}$ で X を覆うことができる．そうすると各 U_{y_i} に対応する関数 f_{y_i} の最小値 $\min\{f_{y_i}\}\in\overline{H}$ が条件を満たす．こうして得られた $f\in\overline{H}$ を改めて g_{x_0} とおく．$g_{x_0}(x_0)=h(x_0)$ であったから，x_0 の適当な開近傍 V_{x_0} をとれば，任意の $x\in V_{x_0}$ に対して $g_{x_0}(x)>h(x)-\varepsilon$ が成り立つ．X の開被覆 $\{V_x\}$ から有限部分被覆 $\{V_{x_j}\}$ をとり，対応する関数 g_{x_j} の最大値 $g=\max\{g_{x_j}\}\in\overline{H}$ を考えれば，g は任意の $x\in X$ に対して $h(x)-\varepsilon<g(x)<h(x)+\varepsilon$ を満足する．すなわち $g\in\overline{H}$ は $h\in C(X)$ を近似する関数である． ■

【系 6.19（ワイエルシュトラスの多項式近似定理）】 ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト部分集合上の任意の連続関数は多項式関数で近似できる．

証明 D をコンパク部分集合，$C(D)$ を D 上の連続関数の全体のなす代数とする．多項式関数の全体 $H\subset C(D)$ は部分代数であり，また $p=(p_i)$, $p'=(p'_i)$ が異なるとき，$p_i\neq p'_i$ なる i に対して 1 次多項式 x_i が p, p' を分離する．したがって H は $C(D)$ で稠密である． ■

■ 例 6.12 ■ 三角多項式

任意の連続関数 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$, $f(0)=f(1)$ に対して，これを近似する三角多項式 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_n\cos 2n\pi t+b_n\sin 2n\pi t)$ が存在する．閉区間 $[0,1]$ において両端 0, 1 を同一視した空間は S^1 と同相であるから，f は S^1 上の関数と見なすことができる．この意味で三角多項式の全体を $H\subset C(S^1)$ と書く．H は定数関数を含み，また三角関数の加法公式より乗法に関して閉じている．さらに $t\neq t'$ ならば $\cos 2\pi t\neq\cos 2\pi t'$, $\sin 2\pi t\neq\sin 2\pi t'$ のいずれかが成り立つから，H は任意の異なる二点を分離する．したがって H は $C(S^1)$ で稠密である． □

6.2.5*　特異な関数と曲線

この項ではいくつかの病的な関数および曲線について述べる.

■ 例 6.13 ■ 至るところ微分不可能な連続関数（ワイエルシュトラス）
閉区間 $[0,1]$ 上定義された連続関数であって, 任意の $0 \le t \le 1$ で微分が不可能なものが存在することを示す. 具体的には級数

$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cos(2^m \pi t)$$

がそのような関数の例を与える. 右辺の各項は絶対値が $1/2^m$ で押さえられるような連続関数であるから, この $s(t)$ は $[0,1]$ 上一様収束し, 極限は連続関数である. 和 $s(t)$ が任意の点で微分可能でないことを示すために, $s(t)$ の二つの増分 $\Delta_+ s(t) = s(t+\Delta t) - s(t)$, $\Delta_- s(t) = s(t) - s(t-\Delta t)$ について, t の増分 Δt との比 $\dfrac{\Delta_+ s(t)}{\Delta t}$ と $\dfrac{\Delta_- s(t)}{\Delta t}$ を比較する. 特に $t = t_n = \dfrac{2k}{2^n}$, $\Delta t = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{2}$ に対して 差 $\Delta_+ s(t) - \Delta_- s(t) = s(t+\Delta t) + s(t-\Delta t) - 2s(t)$ を求めよう. $m \ge n+2$ に対しては $\cos(2^m \pi t_n) = \cos(2^m \pi(t_n \pm \Delta t)) = 1$ であるから, 差を考える際には $m \ge n+2$ の項は無視してよい. $m = n+1$ のときは $\cos(2^{n+1}\pi t_n) = 1$, $\cos(2^{n+1}\pi(t_n \pm \Delta t)) = -1$ であるから, $\Delta_+ s(t) - \Delta_- s(t)$ への寄与は $2 \cdot \dfrac{1}{2^{n+1}}(-2) = -\dfrac{2}{2^n}$. また $m = n$ のときは $\cos(2^n \pi t_n) = 1$, $\cos(2^n \pi(t_n \pm \Delta t)) = 0$ であるから, 寄与は $2 \cdot \dfrac{1}{2^n}(-1) = -\dfrac{2}{2^n}$ で, $m = n, n+1$ をあわせれば $-\dfrac{4}{2^n}$ となる. 一方で $m \le n-1$ の項については,

$$\begin{aligned} |\cos(a(t+\Delta t)) + \cos(a(t-\Delta t)) - 2\cos(at)| &= 2\,|\cos(at)|\,|\cos(a\Delta t) - 1| \\ &\le a^2 \Delta t^2 \end{aligned}$$

より, 寄与の総和は絶対値において

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^m}(2^m \pi)^2 \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \pi^2 \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m-2n-4} \le \pi^2 \frac{1}{2^{n+3}} \cdot 2 = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2^n}$$

を超えない. したがって $\pi^2 < 12$ より $|\Delta_+ s(t) + \Delta_- s(t)| > \dfrac{1}{2^n} = 2\Delta t$. さて関数 s が $0 \le x \le 1$ で微分可能であると仮定し, そこでの微係数を α とおく各 n について x に最も近い $t = t_n$ を選べば, 三点 $t_n, t_n \pm \Delta t$ はいずれも x の $3\Delta t$-近傍に属する. よって微係数の定義より, $s(t_n) = s(x) + \alpha(t_n - x) + o(\Delta t)$ および $s(t_n \pm \Delta t) = s(x) + \alpha(t_n \pm \Delta t - x) + o(\Delta t)$ が成立する. 辺々差し引けば

$\Delta_\pm s(t) = \alpha\Delta t + o(\Delta t)$ を得るが，これは $|\Delta_+ s(t) - \Delta_- s(t)| > 2\Delta t$ に矛盾する．したがって関数 s は $[0,1]$ のすべての点で微分不可能である．

以上は具体的に級数で与えた関数に関する議論であったが，このような関数は特別のものではない．実際にはすべての点で微分可能でない関数は連続関数の空間 $C[0,1]$ の中で第二類の集合をなす．これを証明しよう．区間 $[0,1]$ を $2\cdot 2^n$ 等分し，各部分区間での平均変化率によって $C[0,1]$ の部分集合を定義する．連続関数 $f \in C[0,1]$ であって，各 $c = c_n = \dfrac{k}{2^n}, k = 0, 1, \cdots, 2^n$ と $\Delta c = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{2}$ に対して $\Delta_+ f(c) = f(c + \Delta c) - f(c) > \Delta c$ および $\Delta_- f(c) = f(c) - f(c - \Delta c) < -\Delta c$ を満たすものの全体を $A_n \subset C[0,1]$ とし，$A(N) = \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ とおく．この減少列 $A(N), N = 1, 2, \cdots$ の共通部分 $A = \bigcap_{N=1}^{\infty} A(N)$ に属する関数がすべての $0 \leq t \leq 1$ で微分不可能であることは，ワイエルシュトラス関数の場合と同様に示すことができる．一方で A_n は定義より開集合で，したがって $A(N)$ も開集合であるから，各 $A(N)$ が稠密なることをいえばよい．任意の $g \in C[0,1]$ および $\varepsilon > 0$ に対し g を ε-近似する折れ線関数，すなわち $[0,1]$ を適当に分割した各部分区間上 1 次関数で定義されるような $p \in C[0,1]$ が存在する (参照例 1.50, p.54)．この p に対し $\bar{p}(t) = p(t) - \varepsilon \cos 2^{n+1}\pi t$ とおけば，これはもとの g を 2ε-近似し，また $\Delta_\pm \bar{p}(c) = \Delta_\pm p(c) \pm 2\varepsilon$ より，十分大きい n に対して A_N，したがって $A(N)$ に属する．よって $A(N)$ は稠密であり，$A = \bigcap A(N)$ は $C[0,1]$ の第二類の部分集合である． □

■ 例 6.14 ■ 平面の領域を埋め尽くす曲線 (ペアノ)

平面上の $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ を頂点とする正方形 $R = [0,1] \times [0,1]$ の内部のすべての点を通過する曲線を構成する．まず曲線の定義域の単位閉区間 $I = [0,1]$ を 4 等分し，さらにおのおのを $I_0 \cup J_0$, $\cdots$, $I_3 \cup J_3$ と半分に分ける．次に $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $p_3 = (0, \frac{1}{2})$ を頂点とする正方形を R_1 とし，写像 $\varphi_0 : I \to \boldsymbol{R}^2$ を，各 I_i 上では定値 p_i をとり，J_i 上ではアファインとなるように定義する．写像 φ_0 の像は正方形 R_1 の境界と一致する．次に各 I_i 上で $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{2}\varphi(4t - i)$，各 J_i 上で $\varphi_1(t) = 0$ とおき，$\psi_1(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)$ によって $\psi_1 : [0,1] \to \boldsymbol{R}^2$ を定義する．ただし加法 $+$ は $\boldsymbol{R}^2$ におけるベクトルの和とする．各 I_i を 4 等分し，さらにおのおのを $I_{i0} \cup J_{i0}$, $\cdots$, $I_{i3} \cup J_{i3}$ と半分に分けれ

ペアノ: Giuseppe Peano, 1858-1932.

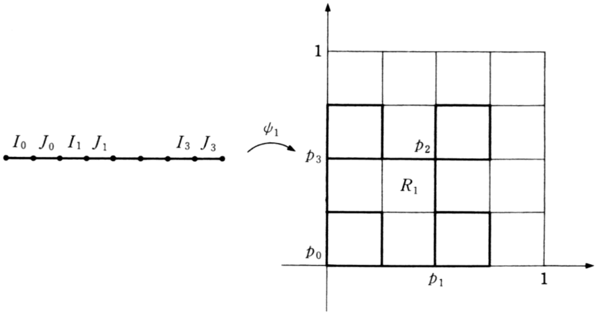


図 6.6

ば, $\psi_1(t)$ は I_{ij} 上定値で, J_{ij} 上ではアファインである. またその像は R_1 の境界に, 各 p_i を左下の頂点とする一辺の長さ 1/4 の正方形 4 個の境界を加えたものとなる (図 6.6). 次に各 I_{ij} 上で $\varphi_2(t)=\dfrac{1}{4}\varphi(4^2t-4i-j)$, 各 J_i および J_{ij} 上で $\varphi_2(t)=0$ とおき, $\psi_2(t)=\varphi_0(t)+\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ と定義する. ψ_2 の像は, ψ_1 の像に一辺の長さ $1/4^2$ の正方形 4^2 個の境界を加えたものである. この操作を繰り返して $\psi_n(t)=\varphi_1(t)+\cdots+\varphi_n(t)$ と定義すれば, $\|\varphi_n(t)\|=\dfrac{1}{2^{n-1}}\|\varphi_1(t)\|=\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ より写像列 ψ_n は $[0,1]$ 上一様収束し, その極限 $\psi_\infty:[0,1]\to\boldsymbol{R}^2$ は連続となる. 極限写像 ψ_∞ の像は構成より R に含まれるが, 逆に R を 4^n 個に等分した各正方形の左下の頂点を含む. このような点の全体は R で稠密であり, コンパクト不変性より $\psi_\infty[0,1]$ は $\boldsymbol{R}^2$ の閉集合であるから, $\psi_\infty[0,1]=R$ が従う.

ほとんど同じ構成方法によって, 空間の領域を埋め尽くす曲線も得られる. また各点で微分不可能であるような関数とは異なり, **ペアノ曲線**, すなわちその像が内点をもつような曲線は例外的である (章末問題 8, p.218). □

■ 例 6.15 ■ 接線をもたない単純閉曲線 (コッホ)

平面上の単純閉曲線, すなわち埋め込み $\gamma:S^1\to\boldsymbol{R}^2$ であって, その像 $\Gamma=\gamma(S^1)$ がすべての点で接線をもたないものを構成しよう. まず平面上に一辺が 1 の正三角形をとり, その周を Γ_1 とおく. 閉区間 $[0,1]$ を三等分し, 分点 0, 1/3, 2/3, 1 を正三角形の角頂点に対応させ, 各部分区間上ではアファインに拡張することによって $\gamma_1:[0,1]\to\Gamma_1\subset\boldsymbol{R}^2$ を定める. ただし $\gamma_1(0)=\gamma_1(1)$ とする. 次に Γ_1 の

コッホ: Helge von Koch

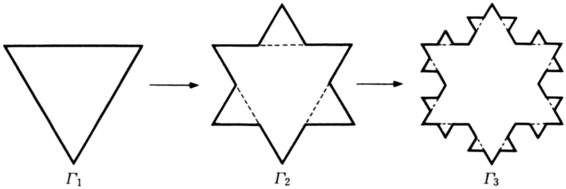


図 6.7

各辺を三等分し, 中央の線分を, それを一辺とする正三角形の他の二つの辺でとりかえる (図 6.7). ただし小三角形は Γ_1 の外側にとる. こうして得られた折れ線を Γ_2, 対応する写像を $\gamma_2 : [0,1] \to \Gamma_2 \subset \boldsymbol{R}^2$ とする. ただし $\gamma_1(t)$ が, Γ_1 から Γ_2 に変えるときに動かない部分に属しているならば, $\gamma_2(t) = \gamma_1(t)$ となるようにする. この方法では, γ_2 を定義するとき用いる部分区間の長さは一定ではなくなるが, それが以降問題となることはない. Γ_2 の各辺で同じ操作を行って, 次の折れ線 Γ_3 および $\gamma_3 : [0,1] \to \Gamma_3$ を構成する. これを繰り返してその極限を考えるのであるが, γ_1 から γ_2 にとり変えるときは, 同じ点 $t \in [0,1]$ の像は高々 1/3 しか動かないから $\|\gamma_1 - \gamma_2\| \leq 1/3$. 同様に $\|\gamma_n - \gamma_{n+1}\| \leq 1/3^n$ であるから, この曲線の列 $\{\gamma_n\}$ は一様収束する. その収束極限 γ が求める曲線である. まず γ が単射であることをいう. $[0,1]$ の異なる二点 t, t' に対して, 十分大きい n をとれば, $\gamma_n(t)$ と $\gamma_n(t')$ は Γ_n の異なる辺に属する. Γ_n の一つの辺を決めたとき, その上の点は, $n+1$ 番目以降の操作で動いたとしても, その辺を最も長い辺とする項角 $2\pi/3$ の二等辺三角形の外部にでることはない (図 6.8). 辺が異なれば, そのような三角形は頂点以外では交わらないから, いったん異なる辺に写された点が, 以降の操作で同じ像をもつことはない. すなわち γ は単射である. 次に接線が存在しないことをいう. 任意の点 $p \in \Gamma = \gamma(S^1)$ のいくらでも近くに, Γ_n の,

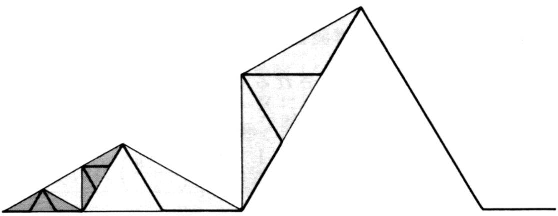


図 6.8

角 $\pi/3$ をなす隣接する辺 $A_{k-1}A_k$, A_kA_{k+1} をとることができる. ここで A_{k-1}, A_k, A_{k+1} は γ_n による分点の像であるから, $n+1$ 番目以降の操作で位置が変わることはない. したがって $A_{k-1}A_k$, A_kA_{k+1} はいずれも曲線 Γ の弦である. もし曲線 Γ が p で接線をもてば, p に近い弦の方向はその接線に近いから, これは p で Γ が接線をもたないことを意味する. □

<まとめ>　バナッハ空間を定義し, コンパクト空間上の連続関数の全体が一様ノルムに関してバナッハ空間をなすこと, その応用としてアスコリ-アルツェラの定理を述べた. この定理は応用上特に重要である. 関数の定義域がコンパクトでない場合には, 広義一様収束による位相が自然であるが, これを写像空間のコンパクト開位相として一般化した. ほかにユークリッド空間の部分集合上の連続関数に関する多項式近似定理, 二, 三の病的な関数, 曲線の例を扱った.

[例題]　一変数関数 $\rho(t)=\begin{cases} e^{-1/(1-t)}, & t<1 \\ 0, & t\geq 1 \end{cases}$ によって $\boldsymbol{R}^n$ 上の関数を $\rho_n(x)=c_n\rho(\|x\|^2)$ で定義する. ただし定数 $c_n>0$ は $\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\rho_n(x)dx=1$ が成り立つようにとる. さてユークリッド空間のコンパクト部分集合 D 上の連続関数 $f: D\to\boldsymbol{R}$ が与えられたとき, f の $\boldsymbol{R}^n$ への連続な拡張を用いて $M_\varepsilon f(x)=\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^n}\rho_n\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)dy$ とおく. M_ε について以下を示せ.

(1) $M_\varepsilon f$ は無限回連続的微分可能.

(2) D 上の一様ノルムに関して $\varepsilon\to 0$ のとき $M_\varepsilon f\to f$.

この M_ε を**軟化作用素**と呼ぶ.

(解) (1) $t>0$ における $\rho(t)$ の n 次導関数 $\rho^{(n)}(t)$ は, 適当な n 次多項式 $p_n(t)$ を用いて $\rho^{(n)}(t)=\dfrac{p_n(t)}{(1-t)^{2n}}e^{-1/1-t}$ と表されるから $\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\rho^{(n)}(t)=0$ を満たす. よって $\rho(t)$ は $t=1$ で無限回連続的微分可能で, $\rho_n(x)$ も $\boldsymbol{R}^n$ で無限回連続的微分可能. このとき例えば $\dfrac{\partial}{\partial x_i}M_\varepsilon f(x)=\displaystyle\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\frac{\partial\rho_n}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)dy$ より $M_\varepsilon f$

も無限回連続的微分可能である.

(2) コンパクト集合上の連続関数の一様連続性 (定理 4.6, p.131) より, 任意の $\eta>0$ に対して $\varepsilon>0$ を選んで, $\|y-x\|<\eta$, $x\in D$ のとき $|f(y)-f(x)|<\eta$ が成り立つようにできる. そうすると y の関数 $\rho\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right)$ の台が $B(x;\varepsilon)$ と一致することから, $x\in D$ に対して $|M_\varepsilon f(x)-f(x)|\le\displaystyle\int_{B(x;\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon^n}\rho_n\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|f(y)-f(x)|\,dy$ $\le\eta$. したがって $\varepsilon\to 0$ のとき $M_\varepsilon f$ は f に D 上一様収束する. ■

章 末 問 題

1. p を素数とし, 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ に p-進距離 d_p を入れる. 数列 $\{r^n\}_{n=1,2,\cdots}$ が d_p に関してコーシー列となるための整数 r についての条件を求めよ.

2. $|\alpha|=1$ を満たす 1 以外の複素数 α と, $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge\cdots\ge 0$ なる数列によって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\alpha^n$ と表される級数が収束する必要十分条件は $a_n\to 0$ であることを示せ. $\alpha=-1$ のときには, これは**交代級数**として知られている.

3. 平面上の三角形 $\triangle ABC$ を, 同一直線上にない点 A, B, C の三組 (A,B,C) と同一視し, 三角形の全体 $\mathcal{T}$ に $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$ から導かれる距離を入れる. このとき以下の部分距離空間が完備であるか否かを調べ, 完備でない場合は完備化を求めよ.

(1) 面積が 1 であるような三角形の全体.

(2) 直径が 1 であるような三角形の全体.

4. 距離空間の間の写像 $\varphi: X\to Y$ が X の任意のコーシー列を Y のコーシー列に写すと仮定する.

(1) このような写像 φ は連続であることを示せ.

(2) このような写像 φ で一様連続でないものを構成せよ.

5. 広義単調増加連続関数 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ であって, $f(0)=0$, $f(1)=1$ を満たし, かつカントール集合 $C\subset[0,1]$ に属さない点 t では $f'(t)=0$ を満たすものを構成せよ. このような関数のグラフを**悪魔の階段**と呼ぶ.

6. コンパクト空間 X 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が, 任意の x に対して $f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots$ を満たし, かつ連続関数 $f: X\to\boldsymbol{R}$ に各点で収束するならば, この収束は一様収束である (**ディニの定理**). これを証明せよ.

ディニ: Ulisse Dini, 1849-1918.

7. ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上のなめらかな関数に関して以下を示せ.

(1) $\{f_m\}$ を $\boldsymbol{R}^n$ 上定義されたなめらかな関数の列, $K\subset\boldsymbol{R}^n$ をコンパクト部分集合とするとき, 適当な $a_m>0$ を選んで, 級数 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(x)$ が K 上なめらかな関数に一様収束するようにできる. K 上の C^r ノルムを用いよ.

(2) 任意の開集合 $U\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して, なめらかな関数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ であって各 $x\in\boldsymbol{R}^n$ に対し $f(x)\geq 0$ かつ $U=\{x;\ f(x)>0\}$ を満たすものが存在する.

8. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の曲線の全体 $C([0,1],\boldsymbol{R}^2)$ のうち, 像 $\gamma[0,1]$ が内点を含まないものの全体は第二類の集合である.

付　　録

集合, 実数, 不等式

付録には, 本文を読み進む上で必要となる用語と事実とをまとめてある. 最初の節は集合論, 次の節では実数論を扱い, 最後の節は基本的な不等式の証明にあてた.

A.1　集　　合

集合に関しての基本的事項を解説する. 最初は集合と写像, 集合族と選択公理, 次に順序関係と同値関係について, 最後は濃度について述べる. 二, 三の命題を除いて証明はすべて省略した. 必要ならば [2], [3], [4] などを参照されたい.

A.1.1　集　　合

数学的対象の集まりを**集合**と呼び, 通常アルファベットの大文字 $A, B, \cdots, Z$ で表す. どのような集まりを集合として認めるかについては議論が必要で, あまり無神経に扱うと矛盾が生ずる. しかしここではそれに関して深くは立ち入らず, 考えている対象が集まりのメンバーであるか否かを明確に判定できるのであれば, その集まりを集合として認めるという立場に立つ. 矛盾の例については最後の A.1.6 項で触れる. 集合に対して, その構成要員を**元**あるいは**要素**と呼び, 通常アルファベットの小文字 $a, b, \cdots, z$ で表す. 数学的対象 a が集合 A の元であるとき, a は A に**属する**, あるいは**含まれる**といい,

$$a \in A \qquad \text{あるいは} \qquad A \ni a$$

と書く. a が A の元でないことを $a \notin A$ と書く. 特に, いかなる元をも含まない

集合も数学的考察の対象となる. これを**空集合**と呼び, 記号 $\emptyset$ で表す. 集合 A を表す方法として A に属する元をすべて列挙する**外延的定義**と, A に属する元の満たすべき条件で表す**内包的定義**がある. 例えば

$$A = \{1,2,3,4\},$$
$$A = \{a;\ a \text{ は整数で } 1 \leq a \leq 4 \text{ を満たす}\}.$$

内包的定義を $\{x|\cdots\}$ と表すこともある. 元を有限個しか含まない集合を**有限集合**, 無限個含む集合を**無限集合**と呼ぶ.

自然数の全体のなす集合を $\boldsymbol{N}$, 整数全体のなす集合を $\boldsymbol{Z}$, 有理数全体のなす集合を $\boldsymbol{Q}$, 実数全体のなす集合を $\boldsymbol{R}$, 複素数全体のなす集合を $\boldsymbol{C}$ で表す. 外延的定義あるいは内包的定義によれば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \{1,2,3,\cdots,n,\cdots\} \\
\boldsymbol{Z} &= \{\cdots,-n,\cdots,0,1,2,\cdots,n,\cdots\} \\
\boldsymbol{Q} &= \left\{\frac{p}{q}\ ;\ p\in \boldsymbol{Z}, q\in \boldsymbol{N}\right\} \\
\boldsymbol{C} &= \{a+b\sqrt{-1}\ ;\ a,b\in \boldsymbol{R}\}
\end{aligned}$$

実数の集合 $\boldsymbol{R}$ をどのように定義するかについては, 次節 A.2 を参照されたい.

集合 A と B とに属する元がまったく一致する, すなわち条件 $x\in A$ と $x\in B$ とが同値となるとき A と B とは**等しい**といい, $A=B$ と書く. また A に属する元がすべて B に属するとき, A は B の**部分集合**である, あるいは A は B に**含まれる**といい

$$A \subset B \qquad \text{あるいは} \qquad B \supset A$$

と書く(図 A.1). これを集合の**包含関係**という. 特に $A=B$ であれば $A\subset B$ が

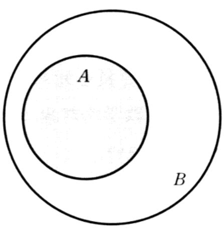


図 A.1　部分集合

成り立つ. $A \neq B$ であって $A \subset B$ となるとき A は B に**真に含まれる**, あるいは A は B の**真部分集合**であるという. これを強調するときには記号 $A \subsetneqq B$ を用いる. すべての集合について, 空集合および自分自身は部分集合である. 一般に集合 A の部分集合の全体はまた集合をなすが, これを A の**べき集合**と呼び, $\mathfrak{P}(A)$ で表す. 包含関係について

(推移律)　$A \subset B,\ B \subset C$　ならば　$A \subset C$

(反対称律)　$A \subset B,\ A \subset B$　ならば　$A = B$

が成り立つ. 集合 A と集合 B と双方に属する元の全体を A と B との**共通部分**あるいは**交わり**と呼び, $A \cap B$ でこれを表す. また集合 A と集合 B とのどちらかに属する元の全体を A と B との**合併集合**, **和集合**あるいは**和**と呼び, $A \cup B$ でこれを表す (図 A.2). 当然 $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$ が成り立つ.

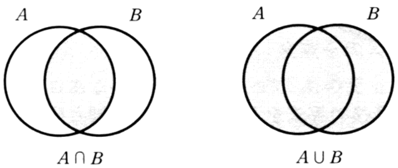


図 A.2　共通部分と和

【命題 A.1】　共通部分と和集合に関して次が成立する.

(交換律)　$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

(結合律)　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

(分配律)　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

(吸収律)　$(A \cup B) \cap A = A, \quad (A \cap B) \cup A = A.$

$A \cap B = \emptyset$ を満たす二つの集合 A, B は**交わらない**といい, このような A, B の和集合 $A \cup B$ を A と B との**直和**あるいは**非交叉和**と呼ぶ. 直和であることを強調するときには, 記号 $A \sqcup B$ あるいは $A + B$ を用いる. 集合 A と B とが共通の元 a を含む場合であっても, $a \in A$ と $a \in B$ とは異なる元であるとして集合 $A \sqcup B$ を構成し, これを直和と呼ぶこともある. 例えば $A \sqcup A$ と書いた場合, この集合

は A そのものではなく, A および A と何らかの意味で同型なコピー A' との直和 $A \sqcup A'$ を意味する. A に属するが B に属さないような元の全体のなす集合を**差集合**といい, $A \backslash B$ あるいは $A - B$ で表す.

数学の特定の理論体系あるいは一連の議論の中では, 一つの集合 Ω が与えられ, 考察の対象となる元あるいは集合はすべてこの Ω に含まれるという状況がしばしば起こる. このとき Ω を**普遍集合**あるいは**全体集合**と呼ぶ. このような状況のもとでは, 集合, すなわち Ω の部分集合 A に対し, その**補集合**が $A^c = \Omega \backslash A$ で定義される (図 A.3).

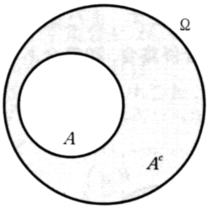


図 A.3　補集合

【命題 A.2】　以下が成立する. 最後の等式を**ド·モルガンの法則**と呼ぶ.

(1)　$A \subset B$ と $A^c \supset B^c$ とは同値.

(2)　$A \cup A^c = \Omega, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad (A^c)^c = A.$

(3)　$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

数学的対象 a, b の**順序対**を (a, b) で表す. 組 (a, b) を数学的対象として認め, $(a, b) = (a', b')$ は $a = a'$ かつ $b = b'$ と同値であるとするのである. 順序対を単に**対**ともいう. 集合 A, B に対し, これらの元の順序対の全体を A と B との**直積集合**あるいは単に**直積**といい, $A \times B$ で表す (図 A.4). すなわち

$$A \times B \;=\; \{\, (a, b);\, a \in A,\, b \in B \,\}\,.$$

$A \times B$ の元 (a, b) に対し, $a \in A$ をその**第一成分**あるいは ***A*-成分**, $b \in B$ をその**第二成分**あるいは ***B*-成分**と呼ぶ.

同様に自然数 n に対して, ***n*-組** $(a_1, \cdots, a_n)$ および**有限直積集合** $A_1 \times \cdots \times A_n$ が定義される. 厳密には帰納法によるべきだが, 直感的に了解されるであろう.

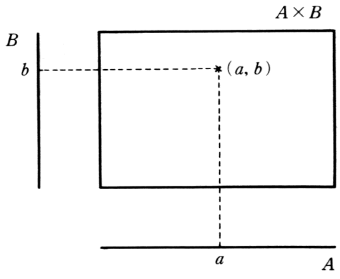


図 A.4　直積集合

A.1.2　写　　像

集合 A, B に対して, A の各元に B の元を対応させる規則が与えられているとき, この規則を A から B への**写像**と呼び, A をこの写像の**定義域**, B を**値域**という. 写像はまた**関数**とも呼ばれるが, これは値域が実数集合あるいは複素数集合のときに多く使われる用語である. φ が A から B への写像であることを $\varphi: A \to B$, $A \xrightarrow{\varphi} B$ などで表す. 変数を代入する場所を明記するために $\varphi(\cdot)$ と書くこともある. 写像 φ によって A の元 a が B の元 b に対応することを $\varphi(a)=b$ あるいは $\varphi: a \mapsto b$ と書き, a が φ によって b に**写される**という. またこの $b=\varphi(a)$ を φ による a の**像**あるいは**値**という. 二つの写像 φ, φ' が等しいのは, それらの定義域が一致し, かつ定義域の任意の元 a に対し $\varphi(a)=\varphi'(a)$ が成り立つときとする. 厳密には値域も一致させる必要があろうが, 特にこだわらないことが多い. 写像 φ によって A の元に対応するような B の元の全体のなす集合のことも φ の**像**と呼び, $\varphi(A)$ で表す (図 A.5). この場合も部分集合 A は φ によって $\varphi(A)$ に**写される**という. $\varphi(A)$ は値域 B の部分集合である. 一般に定義域 A の部分集合 A' に対し

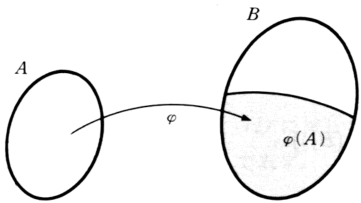


図 A.5　像

$$\varphi(A') = \{\varphi(a');\ a' \in A'\}$$

とおき, これを φ による A' の**像**, あるいは**順像**と呼ぶ. すなわち写像 $\varphi: A \to B$ がべき集合 $\mathfrak{P}(A)$ からべき集合 $\mathfrak{P}(B)$ への新たな写像 $A \mapsto \varphi(A)$ を定義した. これはもとの φ とは本来異なるものであるが, 同じ記号 φ を流用し, $\varphi: \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ と表す. また値域 B の部分集合 B' に対し

$$\varphi^{-1}(B') = \{a';\ \varphi(a') \in B'\}$$

とおき, これを φ による B' の**逆像**あるいは**原像**と呼ぶ. 順像の場合と同じく, φ によって写像 $\varphi^{-1}: \mathfrak{P}(B) \to \mathfrak{P}(A)$, $B' \mapsto \varphi^{-1}(B')$ が定まる. 特に B' がただ一つの元よりなる集合 $\{b\}$ のとき

$$\varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}(\{b\}) = \{a';\ \varphi(a') = b\}$$

と書き, これも $b \in B$ の φ による**逆像**と呼ぶ. 習慣上後に述べる逆写像 $\varphi^{-1}: B \to A$ と同じ記号を用いるので, 注意が必要である.

【命題 A.3】　写像 $\varphi: A \to B$ による部分集合の順像について以下が成立する.

(1) $A_1 \subset A_2$ ならば $\varphi(A_1) \subset \varphi(A_2)$.

(2) $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$.

(3) $\varphi(A_1 \cap A_2) \subset \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)$.

(4) $\varphi(A_1^c) \supset \varphi(A) \cap \varphi(A_1)^c$.

(5) $A_1 \subset \varphi^{-1}(\varphi(A_1))$.

【命題 A.4】　写像 $\varphi: A \to B$ による部分集合の逆像について以下が成立する.

(1) $B_1 \subset B_2$ ならば $\varphi^{-1}(B_1) \subset \varphi^{-1}(B_2)$.

(2) $\varphi^{-1}(B_1 \cup B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cup \varphi^{-1}(B_2)$.

(3) $\varphi^{-1}(B_1 \cap B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cap \varphi^{-1}(B_2)$.

(4) $\varphi^{-1}(B_1^c) = \varphi^{-1}(B_1)^c$.

(5) $B_1 \cap \varphi(A) = \varphi\left(\varphi^{-1}(B_1)\right)$.

写像 $\varphi: A \to B$ および A の部分集合 A' に対して, $\varphi'(a') = \varphi(a')$, $a' \in A'$ で定

義される写像 $\varphi' : A' \to B$ を φ の A' への**制限**と呼び, $\varphi|_{A'}$ でこれを表す. このとき φ は φ' の**拡張**あるいは**拡大**であるという.

任意の元 $a \in A$ を, 与えられた一つの元 $b_0 \in B$ に対応させるような写像 $A \to B$, $a \mapsto b_0$ を**定値写像**と呼ぶ. A の部分集合 A' に対し, $a \in A'$ のとき $\varphi(a)=1$, $a \notin A'$ のとき $\varphi(a)=0$ で定義される写像 $\varphi : A \to \{0,1\}$ を A' の**定義関数**あるいは**特徴関数**と呼び, $\chi_{A'}$ で表す. また任意の $a \in A$ に対して $\varphi(a)=a$ で与えられる写像 $\varphi : A \to A$ を集合 A の**恒等写像**と呼び, id_A あるいは 1_A で表す. 一般に集合 A の部分集合 A' に対し, $a' \mapsto a'$ で与えられる写像 $A' \to A$ を**包含写像**という. 包含写像を $\iota : A' \hookrightarrow A$ あるいは $\iota : A' \subset A$ で表すこともある. 特に空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合であるから, 空集合から任意の集合への (包含) 写像がただ一つあると考える. 対 (a,b) に対しその第一成分 a を対応させる, 直積集合 $A \times B$ から A への写像を A への**射影**と呼び, pr_A で表す. B への射影 $\mathrm{pr}_B : A \times B \to B$ も同様に定義される. 三つ以上の有限直積集合に関しても同様. また二つの写像 $\varphi : A \to B$, $\varphi' : A' \to B'$ に対して, その**直積写像** $\varphi \times \varphi' : A \times A' \to B \times B'$ が $(a, a') \mapsto (\varphi(a), \varphi'(a'))$ で定義される. ただし同一の集合上定義された二つの写像 $\varphi : A \to B$, $\varphi' : A \to B'$ に対して, 対応 $a \mapsto (\varphi(a), \varphi'(a))$ で与えられる写像 $A \to B \times B'$ を直積写像と呼び, $\varphi \times \varphi'$ で表すこともあるので注意が必要である.

写像 $\varphi : A \to B$ が**単射**あるいは **1 対 1** であるとは, $a \neq a'$ のとき $\varphi(a) \neq \varphi(a')$ が成り立つことをいう. また φ が**全射**あるいは**上への写像**であるとは, 任意の $b \in B$ に対して $\varphi(a)=b$ なる $a \in A$ が存在するときをいう. 単射でかつ全射であるような写像を**全単射**という. $\varphi : A \to B$ が全単射であれば, 各 $b \in B$ に対して $\varphi(a)=b$ なる $a \in A$ がただ一つ定まる. この a を $\varphi^{-1}(b)$ と書けば, φ の**逆写像** $\varphi^{-1} : B \to A$ が定義されたこととなる.

二つの写像 $\varphi : A \to B$ および $\psi : B \to C$ に対して, $a \mapsto \psi(\varphi(a))$ で与えられる写像を φ と ψ との**合成写像**といい, $\psi \circ \varphi$ で表す (図 A.6).

【命題 A.5】 写像の合成に関して次が成立する.

(1) $\varphi : A \to B$, $\varphi' : B \to C$, $\varphi'' : C \to D$ に対して $\varphi'' \circ (\varphi' \circ \varphi) = (\varphi'' \circ \varphi') \circ \varphi$. この写像を簡単のため $\varphi'' \circ \varphi' \circ \varphi$ で表す.

(2) $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ に対して $\psi \circ \varphi$ が単射であれば φ は単射.

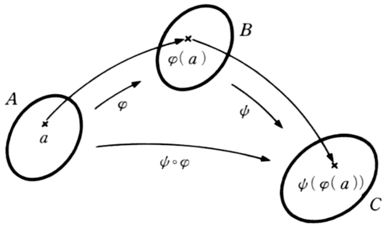


図 **A.6**　合成写像

(3)　$\varphi : A\to B,\ \psi : B\to C$ に対して $\psi\circ\varphi$ が全射であれば ψ は全射.

(4)　$\varphi : A \to B$ が全単射となるのは $\psi : B \to A$ が存在して $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_A$, $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_B$ が成立するとき. このとき ψ が φ の逆写像となる.

写像 $\varphi : A\to B$ に対し

$$G(\varphi) = \{(a, \varphi(a))\,;\ a\in A\}$$

で与えられる $A\times B$ の部分集合 $G(\varphi)$ を φ の**グラフ**という (図 A.7). 写像とグラフを同一視することによって, A から B への写像の全体はまた集合をなす. これを**写像集合**あるいは**配置集合**と呼び, B^A あるいは $\mathrm{Map}(A, B)$ などで表す.

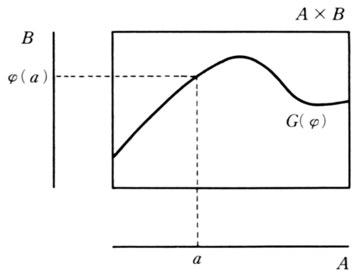


図 **A.7**　グラフ

A.1.3　集合族と選択公理

集合 Λ の各元 λ に対して集合 A_λ が定まっているとき, この対応 $\lambda\mapsto A_\lambda$ を**集合族**といい, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で表す. 誤解を生じない場合には $\{A_\lambda\}_\lambda$, $\{A_\lambda\}$ で代用することもある. また添字 λ を**添数**あるいは**添え字**, 集合 Λ を**添数集合**という. このように普遍集合 Ω のべき集合 $\mathfrak{P}(\Omega)$ への添数集合 Λ からの写像のことを

集合族と呼ぶのであるが，単に集合を元とするような集合 $\mathfrak{A}$ に対してもこの言葉を用いる．これは包含写像 $\iota:\mathfrak{A}\hookrightarrow\mathfrak{P}(\Omega)$ の表す集合族をもとの集合 $\mathfrak{A}$ と同一視しているのである．同じ意味で Λ から集合 A への写像 $\lambda\mapsto a_\lambda$，あるいはその像を A の元の**族**といい，$\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で表す．

集合族 $\{A_\lambda\}$ が与えられたとき，そのすべての集合 A_λ に属する元の全体をこの集合族の**共通部分**といい $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ で表す．$\bigcap_\lambda A_\lambda$ あるいは $\bigcap A_\lambda$ と略記することも多い．以下の和集合，直積集合などに関しても同様である．添数集合 Λ が空集合の場合には $\bigcap_\lambda A_\lambda=\Omega$ (普遍集合) と定義する．また集合族 $\{A_\lambda\}$ のどれかの A_λ に属する元の全体を**和**あるいは**和集合**といい $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ で表す．添数集合 Λ が空集合の場合には $\bigcup_\lambda A_\lambda=\emptyset$ と定義する．特に集合族 $\{A_\lambda\}$ が**互いに素**，すなわち $\lambda\neq\lambda'$ のとき $A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\emptyset$ を満たすならば，和集合 $\bigcup_\lambda A_\lambda$ を**直和**，各 A_λ をその**直和因子**という．直和を $\bigsqcup_\lambda A_\lambda$ で表すこともある．また集合 A をその部分集合の直和として表すことを A の**直和分割**という．

【命題 A.6】 集合族の共通部分，和集合に関して以下が成立する．

(結合律) $\bigcap_{\lambda,\mu}A_{\lambda\mu}=\bigcap_\lambda\left(\bigcap_\mu A_{\lambda\mu}\right),\quad \bigcup_{\lambda,\mu}A_{\lambda\mu}=\bigcup_\lambda\left(\bigcup_\mu A_{\lambda\mu}\right).$

(分配律) $\left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right)\cap\left(\bigcup_\mu B_\mu\right)=\bigcup_{\lambda,\mu}(A_\lambda\cap B_\mu),$

$\left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right)\cup\left(\bigcap_\mu B_\mu\right)=\bigcap_{\lambda,\mu}(A_\lambda\cup B_\mu).$

(ド・モルガンの法則) $\left(\bigcup_\lambda A_\lambda\right)^c=\bigcap_\lambda A_\lambda^c,\quad \left(\bigcap_\lambda A_\lambda\right)^c=\bigcup_\lambda A_\lambda^c.$

添数集合 Λ をもつ集合族 A_λ として普遍集合 Ω の部分集合からなるものをとる．このとき集合族 $\{A_\lambda\}$ の**直積集合** $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を，Λ を添数集合とする Ω の元の族 $\{a_\lambda\}$ であって，すべての $\lambda\in\Lambda$ について $a_\lambda\in A_\lambda$ を満たすものの全体として定義する．直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ に対し，その元を (a_λ) で表し，各 A_λ をその**直積因子**という．また元 (a_λ) に対して $a_\lambda\in A_\lambda$ をその **λ-成分**と呼ぶ．各元に対してその λ-成分を対応させることによって写像 $\mathrm{pr}_\lambda:\prod A_\lambda\to A_\lambda$ が定義されるが，これを A_λ への**射影**と呼ぶ．また同じ添数集合をもつ集合族 $\{A_\lambda\}$，$\{B_\lambda\}$ の対応する集合の間に写像 $\varphi_\lambda:A_\lambda\to B_\lambda$ が与えられている場合，その**直積写像** $\prod\varphi_\lambda:\prod A_\lambda\to\prod B_\lambda$ が，$(a_\lambda)\mapsto(\varphi_\lambda(a_\lambda))$ によって定義される．

直積集合 $A=\prod_\lambda A_\lambda$ の元 $a=(a_\lambda)$ を指定することは, 各集合 A_λ から "同時に" その元 a_λ を取り出すことを意味する. おのおのの A_λ が空集合でない場合, この操作が可能であることは一見自明であるように思えるが, 実際には他の命題から証明することはできず, 通常は公理の一つとして認めて, そのもとで数学的体系を構築する. これを**選択公理**あるいは**選出公理**と呼ぶ.

【選択公理】　空でない集合の族 A_λ, $\lambda\in\Lambda$ の直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は空でない.

一般的議論のためには選択公理は必要であるけれども, 集合の無限直積が空でないことが, 常に選択公理によらなければ判定できないわけではない. 具体的にその元を与えることができれば空でないことはわかるのであって, 例えば $A_\lambda=\boldsymbol{R}$ とすれば, その無限直積 $\prod_\lambda A_\lambda$ は $a=(a_\lambda)$, $a_\lambda=0$ を含むから空ではない. 同じ理由によって, 直積集合 $\prod_\lambda A_\lambda$ は, いったん空でないことを仮定すれば十分多くの元を含むことが示される.

【系 A.7】　すべての A_λ が空集合でなければ, 各 $\lambda_0\in\Lambda$ について射影 pr_{λ_0} : $\prod A_\lambda\to A_{\lambda_0}$ は全射である.

証明　有限直積の場合は定義によって, 無限直積の場合は選択公理によって, ともかく一つの元 $(a_\lambda)\in\prod A_\lambda$ が存在する. このとき任意の元 $x\in A_{\lambda_0}$ に対し, $a(x)_{\lambda_0}=x$, $\lambda\neq\lambda_0$ に対しては $a(x)_\lambda=a_\lambda$ で定義される $a(x)\in\prod A_\lambda$ が存在し, しかも $\mathrm{pr}_{\lambda_0}:a(x)\mapsto x$. したがって射影 pr_{λ_0} は全射である. ■

A.1.4　順序とツォルンの補題

X を集合とする. X の二つの元 x, y に対して xRy であるかそうでないかのいずれか一方のみが常に成立するとき R を X における**関係**と呼ぶ. 関係 R を与えることは X と自分自身との直積集合 $X\times X$ の部分集合 $\{(x,y);\,xRy\}$ を与えることにほかならないから, 直積集合 $X\times X$ の部分集合のことを関係と呼ぶこともある. 関係 xRy が成立しないことを $x\not R y$ で表す. 関係のうち特に重要なものは順序関係と同値関係である.

集合 X の関係 $\leq$ が**順序関係**, あるいは単に**順序**であるとは以下の条件を満た

すときをいい, この三条件を**順序の公理**と呼ぶ.

(反射律)　任意の $x \in X$ に対して $x \leq x$.

(反対称律)　$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$.

(推移律)　$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$.

順序関係は通常 $\leq$ あるいは $\leqq$ で表されるので, 先どりして定義でも $\leq$ を用いた. 順序関係 $\leq$ の与えられた集合 X あるいは対 $(X, \leq)$ を**順序集合**と呼ぶ.

■ 例 A.1 ■ 大小関係

実数における大小関係 $x \leq y$ は順序関係である. この場合任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対して, 常に $x \leq y$ あるいは $y \leq x$ のいずれかが成り立つ. このような順序関係を**全順序**と呼ぶ. これに対して, 全順序とは限らない一般の順序関係を**半順序**と呼ぶこともある. □

■ 例 A.2 ■ 包含関係

X を集合, A, B をその部分集合とする. このとき包含関係 $A \subset B$ はこれら二つの集合の間の関係であるが, これは X のべき集合, すなわちすべての部分集合よりなる集合 $\mathfrak{P}(X)$ の順序関係である. 一般に X を順序関係 $\leq$ の与えられた集合とするとき, x に対してその**切片** $S(x) = \{y \in X;\, y \leq x\} \subset X$ を対応させると, X における順序関係 $\leq$ は, べき集合 $\mathfrak{P}(X)$ の部分集合への包含関係 $\subset$ の制限と見なすことができる. この意味で包含関係は普遍的な順序関係である. □

■ 例 A.3 ■ 整除関係

自然数 n, m に対し, n が m で割り切れるとき $n|m$ と書けば, この関係 $|$ は自然数全体のなす集合 $\boldsymbol{N}$ における順序関係となる. 自然数 n に対し, n の生成する $\boldsymbol{Z}$ の単項イデアル $\mathfrak{a}_n = \{kn; k \in \boldsymbol{Z}\}$ を対応させれば, 整除関係 $n|m$ はイデアルの包含関係 $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_m$ に置き換えられる. □

順序集合 $(X, \leq)$ が**整列集合**であるとは, X の任意の部分集合 E が最小元をもつことをいう. ただし e_0 が E の**最小元**とは, すべての $e \in E$ に対して $e_0 \leq e$ が成立することである. 例えば自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ は通常の大小関係に関して整列集合であるが, 実数全体は整列集合ではない. ツェルメロは次の**整列公理**が選択

ツェルメロ: Ernst Zermelo, 1871-1953.

公理と同値であることを証明した.

【**整列公理**】 任意の集合は, 適当な順序のもとで整列集合となる.

$(X, \leq)$ を順序集合, E をその部分集合とする. X の元 b が E の**上界**であるとは, 任意の $e \in E$ に対して $e \leq b$ が成り立つことをいう. E の上界全体のなす X の部分集合 B に最小元が存在するならば, これを E の**上限**と呼び, $\sup E$ で表す. **下界**, **下限**も同様に定義される. 上限および下限は常に存在するとは限らないが, べき集合 $\mathfrak{P}(A)$ の包含関係については, 任意の部分集合 $\mathfrak{A} = \{A_\lambda\} \subset \mathfrak{P}(A)$ が上限 $\sup \mathfrak{A} = \bigcup_\lambda A_\lambda$ および下限 $\inf \mathfrak{A} = \bigcap_\lambda A_\lambda$ をもつ. また E の元 a が**極大元**であるとは, $a < e$ なる $e \in E$ が存在しないことをいう. **最大元**は極大元であるが, 逆は必ずしも正しくない. さて, 順序集合 $(X, \leq)$ が**帰納的**であるとは, その部分集合 E がこの順序 $\leq$ に関して全順序集合になるならば, X 内に E の上限 $\sup E$ が存在することをいう. この準備のもとで**ツォルンの補題**を述べることができるが, これもまた選択公理と同等である.

【**ツォルンの補題**】 帰納的順序集合は極大元をもつ.

A.1.5 同値関係と商集合

集合 X の関係 $\sim$ が**同値関係**であるとは以下の条件を満たすときをいい, 三条件を**同値関係の公理**と呼ぶ.

(反射律) 任意の $x \in X$ に対して $x \sim x$.

(対称律) $x \sim y$ ならば $y \sim x$.

(推移律) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$.

同値関係は通常 $\sim$ で表されるので, 先どりして定義でも $\sim$ を用いた.

集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき, $x \sim y$ なる x と y とは**同値**であるという. 元 $x \in X$ に対し, これと同値であるような元全体からなる X の部分集合 $C_x = \{y \in X;\ y \sim x\}$ を x の**同値類**と呼ぶ. x の同値類を $[x]$ で表すこともある. 推移律より二つの同値類 C_x, C_y は交わらないか, あるいは一致するかのいずれかである. したがってもとの集合 X は同値類の直和として表される. これを X

の同値関係 $\sim$ による**類別**という. 逆に集合 X の直和分割 $X=\bigcup_\lambda A_\lambda$ が与えられたとき, 関係 $x\sim y$ を, x と y とが同じ A_λ に属することとして定義すれば, これは X の同値関係となり, その同値類による分割はもとの直和分割と一致する.

X を集合, $\sim$ をその同値関係とする. $\sim$ の同値類 C に対しその元を一つ指定することを**代表元**を選ぶといい, 指定された元を代表元と呼ぶ. また同値類全体からなる集合 $\{C_x; x\in X\}$ を X の $\sim$ による**商集合**と呼び, 記号 $X/\sim$ で表す. X の元 x にその同値類 C_x を対応させる写像 $q: X\to X/\sim$ を**商写像**あるいは**標準的全射**という. 定義に従えば商集合は同値類をその元とする集合であるが, 各同値類から代表元を選び, 代表元全体のなす集合をイメージすることが多い.

■ 例 A.4 ■ 剰余類

n を整数とするとき, 整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ の関係 $x\sim y$ を $x-y$ が n で割り切れることとして定義すれば, これは同値関係であり, その同値類を**剰余類**と呼ぶ. この場合, 通常は $\{0,1,\cdots,n-1\}$ を商集合と考える.

一般に G を群, A をその部分集合とする. G の関係 $\sim_A$ を, 適当な $a\in A$ が存在して $x=ya$ となるとき $x\sim_A y$ として定義すれば, $\sim_A$ が同値関係となるのは A が G の部分群であるとき, そのときに限る. A が G の部分群であるときには, 商集合 $G/\sim_A$ は A による G の右剰余類の全体 G/A と一致する. □

■ 例 A.5 ■ 合同, 相似

ユークリッド空間の部分集合に対する合同および相似はともに同値関係である. □

集合 X における同値関係を直積集合 $X\times X$ の部分集合とみなせば, これらの全体には包含関係による順序がはいる. 特に $R_\lambda\subset X\times X$ がすべて同値関係であれば, その共通部分 $\bigcap_\lambda R_\lambda$ も同値関係の公理を満たし, 再び同値関係となる. しかし和 $\bigcup_\lambda R_\lambda$ については推移律が保証されないため, 常には同値関係とはならない. 一般に一つの集合 X における関係の族 $\{R_\lambda\}$ が与えられたとき, 新たな関係 xRy を, X の元の有限列 $x=x_0, x_1, \cdots, x_n=y$ および添数の有限列 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ であって $x_{i-1}R_{\lambda_i}x_i$ あるいは $x_iR_{\lambda_i}x_{i-1}$ が成り立つものが存在することで定義する. この R は同値関係であり, 和 $\bigcup_\lambda R_\lambda$ を含む同値関係の中で最小のものとなる. これを $\{R_\lambda\}_\lambda$ によって**生成される同値関係**と呼ぶ.

■ **例 A.6** ■ **一次分数変換**

$\boldsymbol{R}\setminus\{0,1\}$ において $x\sim\dfrac{1}{x}$, $x\sim 1-x$ によって生成される同値関係を考える. このとき x の同値類は $\left\{x,\ \dfrac{1}{x},\ 1-x,\ \dfrac{1}{1-x},\ 1-\dfrac{1}{x},\ \dfrac{x}{x-1}\right\}$ で与えられる. □

A.1.6 濃　　度

有限集合に関してはその元の個数に意味があるけれども, これを無限集合に対して拡張した概念が濃度である. 二つの集合 A, B が**対等**であるとは, 全単射 $\varphi: A\to B$ が存在することをいい, これを $A\sim B$ で表す. この項の最後で述べるように, 集合の全体を集合として扱うことには無理があるので, 対等関係 $\sim$ は通常の意味での集合における同値関係と見なすことはできないが

(反射律)　$A\sim A$

(対称律)　$A\sim B$ ならば $B\sim A$

(推移律)　$A\sim B$, $B\sim C$ ならば $A\sim C$

が成立し, 集合全体を $\sim$ によって類別することができる. この類別による各類を**濃度**あるいは**基数**という. 通常濃度はドイツ小文字 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ などで表し, 集合 A が類 $\mathfrak{n}$ に属することを A の濃度は $\mathfrak{n}$ であるという. 特に自然数 n に対して, 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ の属する濃度を同じ n で表し, 集合 A とこの $\{1,2,\cdots,n\}$ が対等であるとき, A の濃度は n であるといういい方をする. これはもちろん A に属する元の個数が n であることを意味する. 自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ と対等である集合を**可算**あるいは**可附番**という. 可算集合の濃度は $\mathfrak{a}$ あるいは $\aleph_0$ で表される. 集合が**高々可算**であるとはその濃度が有限あるいは可算無限なることをいう. 無限集合は必ず可算部分集合をもつことが証明されるから, これは "可算以下" を意味する言葉である. 集合が**非可算**とはその濃度が可算よりも真に大きいことをいう. また実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の濃度を**連続の濃度**と呼び $\mathfrak{c}$ で表す.

集合 X が可算であることは自然数全体の集合 $\boldsymbol{N}$ と対等であることとして定義されたから, これは X の元を

$$x_1, x_2, x_3, \cdots$$

と並べて, すべてを尽くすことができることと同値である. 例えば整数全体のなす集合 $\boldsymbol{Z}$ は, その元を

$$0, 1, -1, 2, -2, \cdots$$

と並べることによって可算であることがわかる．また有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は，有理数 $\pm\dfrac{n}{m}$, $n\geq 0$, $m>0$ を $n+m$ の大きさによって，ただし以前に現れたものは省いて並べる，具体的には

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\cdots$$

とすることによって可算集合であることが示される．一方実数空間 $\boldsymbol{R}$ は可算でない，すなわち連続の濃度と可算濃度は異なる．これは以下のように示される．

すべての実数を $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ と並べることができたとする．各 α_n を小数表記して，その小数点以下第 k 位の数を a_{nk} とおく．この二重数列の対角線成分 a_{nn} に着目し

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= m_1.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots\\ \alpha_2 &= m_2.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots\\ &\ \vdots\\ \alpha_n &= m_n.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots\\ &\ \vdots\end{aligned}$$

$$b_n=\begin{cases}2, & a_{nn}\ \text{が奇数のとき}\\ 1, & a_{nn}\ \text{が偶数のとき}\end{cases}$$

によって新たな数列 b_n を定義しよう．そうすると b_n を用いて $\beta=0.b_1b_2b_3\cdots$ と表記される実数 β は α_k とは小数点以下第 k 位が異なる．よってこの β はどの α_k とも一致せず，$\{\alpha_k\}$ がすべての実数を尽くしていることに矛盾する．したがって実数空間は可算ではない．

濃度 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ に対しての大小関係 $\mathfrak{n}\leq\mathfrak{m}$ を，濃度 $\mathfrak{n}$ をもつ集合 N から濃度 $\mathfrak{m}$ をもつ集合 M への単射が存在することと定義する．これは M から N への全射が存在することと同値であり，また次の反対称律が成立する．

【ベルンシュタインの定理】　二つの濃度 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{n}\leq\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}\leq\mathfrak{n}$ を満たせば $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$.

整列公理を用いて，任意の濃度 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ は $\mathfrak{n}\leq\mathfrak{m}$ あるいは $\mathfrak{m}\leq\mathfrak{n}$ のいずれかを満たすことが証明できる．したがって濃度に対する順序関係 $\leq$ は全順序となる．

二つの濃度 $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ に対し，濃度がそれぞれ $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ であるような集合 N, M をとり，それらの直和 $N\sqcup M$, 直積 $N\times M$, 写像集合 $N^M=\{f:M\to N\}$ の濃度で

ベルンシュタイン: Sergei Natanovič Bernšteĭn, 1880-1968.

もって濃度の和 $\mathfrak{n}+\mathfrak{m}$, 積 $\mathfrak{n}\mathfrak{m}$, べき $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ を定義する. この定義が代表元 N, M のとり方によらないことは明らかであろう.

【命題 A.8】 濃度の演算に関して次が成立する.

(結合律) $(\mathfrak{n}+\mathfrak{m})+\mathfrak{l}=\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{l}),\quad (\mathfrak{n}\mathfrak{m})\mathfrak{l}=\mathfrak{m}(\mathfrak{n}\mathfrak{l})$.

(交換律) $\mathfrak{n}+\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{n},\quad \mathfrak{n}\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

(分配律) $(\mathfrak{n}+\mathfrak{m})\mathfrak{l}=\mathfrak{m}\mathfrak{l}+\mathfrak{n}\mathfrak{l}$.

■ 例 A.7 ■ 可算濃度の演算

可算濃度 $\mathfrak{a}$, 連続濃度 $\mathfrak{c}$ に関して $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$, $2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$ が成立する. 最初の二つの等式は整数集合 $\boldsymbol{Z}$, 有理数集合 $\boldsymbol{Q}$ が可算であることの証明とまったく同様に示される. 最後の等式については, まず $2^{\mathfrak{a}}$ が $\boldsymbol{N}$ から $\{0,1\}$ への写像全体 $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$, すなわち 0 あるいは 1 の値をとる数列全体のなす集合の濃度であることに注意する. この数列の数字をそのまま小数点以下に並べて実数の十進法表記と見なせば, これは $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ から実数空間への単射を与える. したがって $2^{\mathfrak{a}}\leq\mathfrak{c}$. 一方数列を二進法表記と見なせば, これは $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ から区間 $[0,1]$ への全射を与える. 区間 $[0,1]$ の部分集合である $(0,1)$ は写像 $x\mapsto\tan\pi(x-\frac{1}{2})$ によって実数空間 $\boldsymbol{R}$ と対等であるから $2^{\mathfrak{a}}\geq\mathfrak{c}$. よってベルンシュタインの定理より $2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$. また $2^{\mathfrak{a}}\leq\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}\leq(2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}$ であるから $2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{c}$ を得る. □

■ 例 A.8 ■ 代数的数

複素数 α が**代数的数**であるとは, 整数係数の多項式 $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$, $a_i\in\boldsymbol{Z}$ が存在して α がその根となるときをいう. 代数的でない複素数を**超越数**と呼ぶ. 整数係数多項式の全体は可算集合であるから, 代数的数の全体も可算集合であり, したがって超越的な複素数および実数が存在することがわかる. 例えば円周率 π, ネイピアの数 (自然対数の底) e などは超越数であるが, これらが実際に整数係数多項式の根とならないことの証明は難しい. □

ネイピア: John Napier, 1550-1617.

【命題 A.9 (カントール)】 任意の集合 A に対して, A とそのべき集合 $\mathfrak{P}(A)$ とは対等ではない. したがって任意の濃度 $\mathfrak{n}$ について, べき $2^{\mathfrak{n}}$ はもとの $\mathfrak{n}$ よりも真に大きい.

証明　集合 A からそのべき集合 $\mathfrak{P}(A)$ への全射 $\varphi: A\to\mathfrak{P}(A)$ が存在したとして矛盾を導く. この φ を用いて A の部分集合 X を

$$X=\{a\in A\,;\,a\notin\varphi(a)\}$$

で定義し, $\varphi(x)=X$ なる $x\in A$ を考える. このとき $x\in X$ ならば, X の定義より $x\notin\varphi(x)=X$ であり, $x\notin X$ ならば, 同じく X の定義より $x\in\varphi(x)=X$ となって, いずれの場合も矛盾が生じる. したがって全射 $\varphi: A\to\mathfrak{P}(A)$ は存在しえない. これは連続の濃度が可算でないことを示した手法と本質的に同じものである. このような論法を**対角線論法**と呼ぶ. ■

この命題から逆に, 集合として扱うことのできる対象には大きさに限度があることがわかる. あまりに大きいものを集合とすると矛盾が生ずるのである. 例えば集合の全体 X がまた集合をなしたと仮定しよう. このときなんらかの集合の元となる対象の全体は $Y=\bigcup_{A\in X}A$ で与えられ, これは X を添数集合とする集合族の和であるから再び集合をなす. そうすると Y は数学的対象となるものはすべてその元として含んでいる. したがって Y の任意の部分集合はまた Y の元であり, よって Y のべき集合 $\mathfrak{P}(Y)$ から Y への単射が存在する. これは Y が $\mathfrak{P}(Y)$ 以上の濃度をもつことを示しており, 命題 A.9 に矛盾する.

A.2　実　　　数

自然数から始めて, 実数論を展開する. 主眼は実数の連続性公理である.

A.2.1　自　然　数

自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ は以下の**ペアノの公理**を満たす集合として定義される.

(P_1)　$1\in\boldsymbol{N}$.

(P_2)　$n\in\boldsymbol{N}$ に対して n の**後者** $n'\in\boldsymbol{N}$ が定義されている.

(P_3)　$n'=1$ となるような $n\in\boldsymbol{N}$ は存在しない.

(P_4) $n \neq m$ ならば $n' \neq m'$.

(P_5) $\boldsymbol{N}$ は条件 (P_1), (P_2) を満足する集合のなかで最小, すなわち集合 M が "$1 \in M$" および "$n \in M$ ならば $n' \in M$" を満足すれば $\boldsymbol{N} \subset M$.

ここでいう自然数 n の後者 n' は, 後に加法が定義されれば $n+1$ で与えられる. また自然数は十進法表記で表すものとする. すなわち $1' = 2, 2' = 3, \cdots, 9' = 10, \cdots$ である. さて最小性の公理 (P_5) によれば, 自然数 n に関する命題 $P(n)$ が与えられたとき,

(I_1) $n=1$ に対する命題 $P(1)$ を示し,

(I_n) $P(n)$ を仮定して $P(n')$ を示す

ことによって, 命題 $P(n)$ がすべての自然数 n について成立することの証明が得られる. 公理 (P_5) における集合 M を, 命題 $P(n)$ が成り立つような自然数 n の全体とすればよい. いわゆる**数学的帰納法**である. 帰納法は証明だけでなく, 写像などを定義するときにも用いられる. これを**帰納的定義**という. 例えば二つの自然数 n, m の**和** $n+m$ は以下のように m に関して帰納的に定義される.

(A_1) $n + 1 = n'$

(A_m) $n + m' = (n + m)'$

この演算を自然数の**加法**という. さて自然数 n, m に対して $n=m+k$ なる自然数 $k \in \boldsymbol{N}$ を m と n との**差**といい $m-n$ で表す. このような k が存在するとき n は m よりも**大きい**あるいは m は n よりも**小さい**といい, これを $n>m$ あるいは $m<n$ で表す. m が n より小さいかあるいは等しいことを $m \leq n$ で表せば, 大小関係 $\leq$ は $\boldsymbol{N}$ における全順序関係となる. 大小関係を用いれば, 命題 $P(n)$ を証明する際の帰納法の二つのステップを

(I_n^*)　任意の $k<n$ なる自然数に対して $P(k)$ を仮定して $P(n)$ を示す

にまとめることができる. いま (I_n^*) が証明されたとしよう. 命題 $P(n)$ を新たな命題 $P^*(n)$: " $k \leq n$ を満たすすべての自然数 k について $P(n)$ が成立" で置き換える. この $P^*(n)$ に関する (I_n) はもとの命題 $P(n)$ に関する (I_{n+1}^*) そのもの. また $k<1$ なる自然数が存在しないことから, $n=1$ の場合の (I_1^*) の仮定は必ず真となり, 結論の $P^*(1) = P(1)$, すなわち (I_1) は証明されている. したがって帰納法のもとの形より $P^*(n)$ はすべての自然数 n について成立するが, この

命題は $P(n)$ を含むから, すべての自然数 n について $P(n)$ が成立する.

【命題 A.10】 自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ の任意の空でない部分集合 A は大小関係に関する最小元をもつ.

証明　自然数の集合 $\boldsymbol{N}$ の部分集合 A が最小元をもたないと仮定する. n を自然数とし, 任意の $k<n$ に対して $k\notin A$ とする. このときもし $n\in A$ ならばこの n が A の最小元となって仮定に反するから $n\notin A$. すなわち n に関する命題 $n\notin A$ について, 条件 (I_n^*) が示された. したがって A は空集合である. ■

次に二つの自然数 n, m の**積** $n{\cdot}m$ を

(M_1)　$n \cdot 1 = n$

(M_m)　$n \cdot (m') = (n \cdot m) + n$

によって定義する. これを自然数の**乗法**と呼ぶ. 誤解の生じない限り $n{\cdot}m$ を nm で表す習慣である. このように定義された加法および乗法は以下の性質をもつ. 証明は読者にゆだねる.

(R_1)　$a + (b + c) = (a + b) + c$

(R_2)　$a + b = b + a$

(R_3)　$a \cdot 1 = a$

(R_4)　$a(bc) = (ab)c$

(R_5)　$ab = ba$

(R_6)　$(a + b)c = ac + bc$

(R_1), (R_2) を**加法の結合律**, **交換律**, (R_4), (R_5) を**乗法の結合律**, **交換律**, (R_6) を**分配律**という. 結合律によって和 $(a+b)+c$ あるいは $a+(b+c)$ を $a+b+c$ と表すことができる. 積に関しても同じく $(ab)c=a(bc)$ を abc で表す. 項の数 k が 4 以上のとき, 同様に $a_1+a_2+\cdots+a_k$, $a_1a_2\cdots a_k$ は確定した意味をもつ. これらはまた和あるいは積の記号を用いて $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i$, $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} a_i$ とも表される. 乗法と加法が混在する計算式においては乗法を優先する. 例えば $nm+\ell$ は $(nm)+\ell$ を表す.

A.2.2　整数と有理数

自然数 n に符号 $-$ をつけた数 $-n$ を考え, こうして得られた数と自然数および 0 を**整数**と呼ぶ. 整数の全体からなる集合を $\boldsymbol{Z}$ で表す. 自然数を**正の整数**, その符号を**正**あるいは $+$ という. また自然数に符号 $-$ をつけた数を**負の整数**, その符号を**負**あるいは $-$ という. 0 は正でも負でもない.

負の整数を導入することにより, $n<m$ なる自然数に対しても, その差を $n-m=-(m-n)$ で定義することができる. ただし $n-n=0$ とおく. これを用いて $\boldsymbol{Z}$ における加法を以下で定義する. n, m を正の整数とするとき $n+m\in\boldsymbol{N}$ はすでに定まっていたから, その他の符号の組合せについて

$$n+(-m)=n-m, \quad (-n)+m=m-n, \quad (-n)+(-m)=-(n+m)$$

とおくのである. ただし任意の整数 ℓ に対して $\ell+0=0+\ell=\ell$ とする. 同様に $\boldsymbol{Z}$ における乗法が, n, m を自然数とするとき

$$n(-m)=(-n)m=-(nm), \quad (-n)(-m)=nm$$

で定義される. ただし $0\cdot\ell=\ell\cdot 0=0$ である. こうして定義した加法および乗法は (R_1)~(R_6) を満たす.

整数の範囲においては加法の逆演算としての**減法**が定義される. 二つの整数 n と m との差を $n-m=n+(-m)$ とおくのである. ただし $-m=(-1)\cdot m$ である. この差 $n-m$ が正の整数となるとき $n>m$ とし, これによって $\boldsymbol{Z}$ に大小関係が定義されるが, 加法および乗法はこの大小関係と両立する. すなわち

(R_7)　$x<y$ のとき任意の z に対し $x+z<y+z$

(R_8)　$x<y$ のとき, $z>0$ ならば $xz<yz$, $z<0$ ならば $xz>yz$

次に有理数を定義する. 二つの整数 n, m を用いて $\dfrac{n}{m}$ と表される数を **有理数**といい, その全体を $\boldsymbol{Q}$ で表す. ただし分母の m は 0 でないとし, n, m と n', m' が関係 $nm'=n'm$ を満たすとき $\dfrac{n}{m}$ と $\dfrac{n'}{m'}$ とは同じ有理数を表すものとする. ここで分母が 1 であるような有理数 $\dfrac{n}{1}$ を分子の整数 $n\in\boldsymbol{Z}$ と同一視し, これによって $\boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{Q}$ の部分集合と見なす. また分母子が同符号であるような有理数を**正**, 異符号であるような有理数を**負**と呼ぶ. 0 は正でも負でもない.

有理数の加法および乗法を

$$\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'} \quad = \quad \frac{nm'+n'm}{mm'}$$

$$\frac{n}{m}\cdot\frac{n'}{m'} \quad = \quad \frac{nn'}{mm'}$$

で定義すると，これは (R_1)~(R_6) を満たす．整数のとき同様，二つの有理数 $p, q \in \boldsymbol{Q}$ の差を $p-q=p+(-1)q$ で定め，この差 $p-q$ が正であるときに $p>q$ とすることによって，有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ に大小関係が定義される．この大小関係は加法および乗法に関して (R_7), (R_8) を満たす．また数の概念を有理数まで拡張すれば，乗法の逆演算としての**除法**が定義できる．有理数 $q=\dfrac{n}{m}$ の**逆数**を $q^{-1}=\dfrac{m}{n}$ で定める．ただし $n\neq0$，すなわち $q\neq0$ を前提とする．そうすると有理数 p の 0 以外の有理数 q による**商**が

$$\frac{p}{q}=p\cdot q^{-1}$$

で定義される．紙面の都合で $\dfrac{p}{q}$ を p/q と書くこともある．p, q がともに整数の場合，これは有理数の定義と一致している．

A.2.3 実　　数

有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ およびその四則演算と順序関係が確定したわけであるが，これから実数あるいは実数の集合 $\boldsymbol{R}$ を定義するには，基本的に二通りの方法がある．一つはデデキントの切断あるいはコーシーの基本列を用いて，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ を構成する直接的な方法．もう一つは実数の集合の満たすべき条件を列挙して，それによって $\boldsymbol{R}$ を特徴づける間接的な方法である．直接的な方法は，まず実数の全体 $\boldsymbol{R}$ を定義し，しかる後に四則演算と大小関係を $\boldsymbol{R}$ に導入するという手順をとるため煩雑である．一方間接的な方法では，最初に公理を与えるため煩雑さは避けられるものの，公理を満たす集合の存在が自明でない課題として残されていることに注意すべきである．本書では後者の立場をとり，存在証明は放棄するが，前者の立場をとる参考書として [4], [5] を挙げておく．

実数の集合 $\boldsymbol{R}$ は有理数を含む集合であり，かつ有理数の四則演算を拡張した四則演算が定義され，(R_1)~(R_6) を満たしていること，さらに $\boldsymbol{Q}$ の大小関係を拡張する形で全順序たる大小関係が定義され，(R_7), (R_8) を満足していることを前提とする．しかし，実際にはこれら (R_1)~(R_8) だけでは実数は確定せず，以下

デデキント: Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831-1916.

で述べる連続性公理をさらに仮定する必要がある.

実数全体のなす集合 $\boldsymbol{R}$ の部分集合 A に対し, $b\in\boldsymbol{R}$ が A の**上界**であるとは, 任意の $a\in A$ について $a\leq b$ が成り立つときをいう. 上界が存在するような部分集合 A を**上に有界**であるという. 同様に任意の $a\in A$ に対し $b'\leq a$ を満たす $b'\in\boldsymbol{R}$ を A の**下界**といい, 下界をもつような A を**下に有界**という. 上にも下にも有界であるような部分集合を単に**有界**という. さて実数の部分集合 A が上に有界であるとき, A の上界のなかで最小のものが存在するならば, この最小上界を A の**上限**といい $\sup A$ で表す. 言い換えれば $\lambda=\sup A$ は次の二条件 (S_1), (S_2) と同値である (図 A.8).

(S_1)　任意の $a\in A$ に対し $a\leq\lambda$.

(S_2)　任意の $\varepsilon>0$ に対し $\lambda-\varepsilon<a'$ なる $a'\in A$ が存在する.

同様に A が下に有界でかつ最大の下界が存在するとき, これを A の**下限**と呼び $\inf A$ で表す. A が有限集合の場合, $\sup A, \inf A$ はそれぞれ A の最大元, 最小元を表すが, この場合は記号 $\max A, \min A$ を用いることが多い.

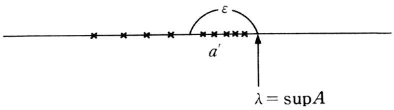


図 A.8　上限

【実数の連続性公理】　空でない部分集合 $A\subset\boldsymbol{R}$ が上に有界であれば, A は上限 $\sup A$ をもつ.

実数の部分集合 A が上に有界でないことを $\sup A=\infty$ で表すこともある. この書き方を許せば, $\boldsymbol{R}$ の任意の部分集合 A に対して $\sup A$ が, 少なくとも形式的には定義されたこととなる. 同様に A が下に有界でないことを $\inf A=-\infty$ で表す. 下に有界なる部分集合 A に対しては, $-A=\{-a;\ a\in A\}$ の上限の符号を転じた $-\sup(-A)$ がその下限を与えるから, 任意の $A\subset\boldsymbol{R}$ に対して下限 $\inf A$ も定義された.

【定理 A.11 (アルキメデスの原理)】 任意の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に対し, $a < n$ なる自然数 $n \in \boldsymbol{N}$ が存在する.

証明 自然数全体 $\boldsymbol{N}$ が上に有界でないことをいえばよい. もし有界であれば連続性公理より上限 $\lambda = \sup \boldsymbol{N}$ が存在する. 条件 (S_2) より $\lambda - 1/2 < n$ なる自然数 n が存在するが, このとき $n+1 > \lambda + 1/2 > \lambda$ となって, λ が $\boldsymbol{N}$ の上界であることに矛盾する. したがって $\boldsymbol{N}$ は上に有界でない. ■

a, b を実数とするとき, $(a,b) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a < x < b\}$ で定義される $\boldsymbol{R}$ の部分集合を**開区間**と呼ぶ. 同様に**閉区間**が $[a,b] = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a \leq x \leq b\}$ で, **半開区間**が $[a,b) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a \leq x < b\}$ あるいは $(a,b] = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a < x \leq b\}$ で定義される. $(-\infty, b) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ; x < b\}$, $(a, \infty) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a < x\}$, $(-\infty, \infty) = \boldsymbol{R}$ も開区間と呼ぶ. 半開区間に関しても同様である. 開区間, 閉区間, 半開区間を総称して**区間**という. 区間は実数の位相を考える際の基本的単位であった.

【系 A.12 (有理数の稠密性)】 任意の開区間は有理数を含む.

証明 開区間を (a,b) とし, 簡単のため $0 < a < b$ として証明する. アルキメデスの原理より $n_0 > \dfrac{1}{b-a}$ なる自然数 n_0 が存在する. 次にこの n_0 に対し $m > n_0 a$ を満たす自然数 m のうち最小のものを m_0 とおく. これはアルキメデスの原理と命題 A.10 (p.237) によって存在が保証されている. このとき $\dfrac{m_0 - 1}{n_0} \leq a$ より $\dfrac{m_0}{n_0} \leq a + \dfrac{1}{n_0} < b$. したがって有理数 $\dfrac{m_0}{n_0}$ は開区間 (a,b) に属する. ■

A.2.4 数　　列

まず絶対値の概念を定義する. 実数 x に対し, x と $-x$ のうちの大きい方を $|x|$ で表し, x の**絶対値**という. 0 に対しては $|0| = 0$ である. 次の三角不等式は符号による場合分けによって容易に証明できる.

【命題 A.13】 $|x+y| \leq |x| + |y|$.

アルキメデス: Archimedes, 287?-212B.C.

各自然数 n に実数 a_n を対応させる写像 $n \mapsto a_n$ を**数列**と呼び, $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ あるいは $\{a_n\}$ でこれを表す. このとき $\{\}$ は集合を表す記号ではないことに注意する. 数列 $\{a_n\}$ に対し, 適当な $n' \in \boldsymbol{N}$ を無限個抜き出して得られる数列 $\{a_{n'}\}$ を**部分列**という. 数列 $\{a_n\}$ において, 添え字 n を大きくすれば a_n が一定の実数 $a \in \boldsymbol{R}$ に限りなく近づくとき, この数列 $\{a_n\}$ は a に**収束する**といい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{あるいは} \qquad a_n \to a$$

でこれを表す. n がいくらでも大きくなることを記号 $n \to \infty$ で表すのである. いわゆる ε-δ 論法でいうならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な N が存在して, $n > N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つこと. ここでアルキメデスの原理より "任意の実数 $\varepsilon > 0$" の代わりに "任意の自然数 k について $1/k$" で議論すれば十分であることに注意する. これは実数空間の第一可算性を示している.

数列の極限と大小関係, 四則演算の間には次の関係がある. このうち四則演算と極限の可換性については, その証明は実数における四則演算の連続性の証明と本質的に同等であるので, ここでは省略する (参照例 1.15, p.17).

【定理 A.14】 収束数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n が $a_n \le b$ を満足すれば, その極限も $\lim a_n \le b$ を満たす.

証明　数列 $\{a_n\}$ の各項が $a_n \le b$ を満たすとし, この b に対して $b < \beta$ なる実数 β をとる. 任意の n に対して $|a_n - \beta| = \beta - a_n \ge \beta - b$ が成り立つが, 右辺は正の決まった数であるから β は $\{a_n\}$ の極限ではない. したがって $\lim a_n \le b$ である. ■

【定理 A.15】 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について極限 $\lim a_n$, $\lim b_n$ の存在を仮定すれば, 以下が成立する. ただし (3) ではさらに $\lim b_n \ne 0$ を仮定する.

(1) $\lim(a_n \pm b_n) = (\lim a_n) \pm (\lim b_n)$

(2) $\lim a_n b_n = (\lim a_n)\cdot(\lim b_n)$

(3) $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$

さて実数の連続性を上限の存在の形で仮定したが, これから数列の極限の存在の形での定式化を得る. 数列 $\{a_n\}$ が**上に有界**とは $\{a_n\}$ が $\boldsymbol{R}$ の部分集合として上に有界であることとする. **下に有界**, **有界**も同様に定義される. また $\{a_n\}$ が **(広義) 単調増加**あるいは**単調非減少**であるとは $a_n \le a_{n+1}$ が常に成り立つこと. **(広義) 単調減少**あるいは**単調非増加**も同様に定義される. 単調増加あるいは単調減少たる数列を単に**単調**と呼ぶ.

【定理 A.16】 有界な単調数列は極限をもつ.

証明　数列 $\{a_n\}$ を有界かつ単調増加とし, この数列のメンバーすべてからなる $\boldsymbol{R}$ の部分集合を A とおく. 仮定から A は有界であるから上限 $\alpha = \sup A$ が存在するが, この α が数列 $\{a_n\}$ の極限である. 実際, α が A の上限であることから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\alpha - \varepsilon < a_N$ なる a_N が存在する. そうすると $\{a_n\}$ の単調性より $n > N$ であれば $\alpha - \varepsilon < a_N \le a_n$. 一方で α は A の上界の一つであるから $a_n \le \alpha$. したがって $\{a_n\}$ は α に収束する. ■

有界な単調数列が収束することが示されたのであるが, 一般の数列は有界であっても必ずしも極限をもつわけではない. しかしながら適当な部分列をとれば, それは収束する. 以下でこれを証明する.

有界な数列 $\{a_n\}$ に対し, 集合 A_n を $A_n = \{a_k\}_{k \ge n}$, ただし右辺の { } は集合を表すとして定義し $\bar{a}_n = \sup A_n$ とおく. そうすると $A_n \supset A_{n+1}$ であるから $\bar{a}_n \ge \bar{a}_{n+1}$, すなわち数列 $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少. しかももとの数列が下に有界であることから, この数列 $\{\bar{a}_n\}$ も下に有界. したがって定理 A.16 より, 数列 $\{\bar{a}_n\}$ は極限をもつ. この極限をもとの数列 $\{a_n\}$ の**上極限**といい $\limsup_{n\to\infty} a_n$ あるいは $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ で表す. 同様に有界な数列 $\{a_n\}$ の**下極限**が, 単調増加数列 $\{\inf A_n\}$ の極限として定義される. 下極限を $\liminf_{n\to\infty} a_n$ あるいは $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ で表す.

【定理 A.17 (ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理)】 有界なる数列は収束部分列をもつ.

証明　$\{a_n\}$ を有界な数列とし, $\alpha = \limsup a_n$ とおく．任意の自然数 k に対して十分大きい $n(k)$ をとれば $|\bar{a}_{n(k)} - \alpha| < 1/k$. 一方 $\bar{a}_{n(k)} = \sup A_{n(k)}$ であるから, 適当な $n'(k) \geq n(k)$ に対して $|a_{n'(k)} - \bar{a}_{n(k)}| < 1/k$. したがって三角不等式より $|a_{n'(k)} - \alpha| < 2/k$ となるが, これは $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n'(k)}\}$ が α に収束することを示している. ■

以上で上限の存在を仮定して, 有界単調数列の収束 (定理 A.16), 有界数列が収束部分列を含むこと (定理 A.17) を述べたが, これらの三つの命題はすべて同値であり, どれを実数の公理として採用してもよいことが知られている. 詳しくは [5] を参照されたい.

次に与えられた数列が収束するか否かの判定法を述べる. $\{a_n\}$ を収束する数列とし, その極限を α とおく. そうすると $n, m \to \infty$ のとき $|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| \to 0$. 逆にこの条件

$$n, m \to \infty \quad \text{のとき} \quad |a_n - a_m| \to 0$$

を満たすような数列 $\{a_n\}$ を**コーシー列** あるいは**基本列**と呼ぶ. ε-δ 式にいえば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し適当な N をとって, $n, m \geq N$ のとき $|a_n - a_m| < \varepsilon$ が成り立つようにできること.

【定理 A.18 (コーシーの判定法)】　数列が収束するための必要十分条件はそれがコーシー列であること.

証明　コーシー列が収束することをいえばよい. $\{a_n\}$ をコーシー列とする. このとき十分大きい N をとれば $n \geq N$ のとき $|a_n - a_N| < 1$ であるから, $\{a_n\}$ は有界である. したがってボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理によって収束部分列 $\{a_{n'}\}$ が存在する. その極限を α と書けば, 三角不等式

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n'}| + |a_{n'} - \alpha|$$

の右辺の第一項は $\{a_n\}$ がコーシー列であることから $n, n' \to \infty$ のとき 0 に収束し, また第二項は $\{a_{n'}\}$ の極限が α であることから $n' \to \infty$ のとき 0 に収束する. これは数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを示している. ■

A.2.5 級　　数

数列と並んで重要な概念に級数がある．数列 $\{a_n\}$ に対し，$s_n=a_1+\cdots+a_n$ で定義される新たな数列 $\{s_n\}$ を**級数**といい，$\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ などで表す．級数が収束するとき，その極限を**和**と呼び，これも同じ記号 $\sum a_n$ で表す．また $s_N=\sum_{n=1}^{N} a_n$ をその**部分和**と呼ぶ．特に各項が $a_n \geq 0$ であるような級数を**正項級数**という．この条件は $\{s_n\}$ が単調増加であることと同値．したがって正項級数は，その部分和が有界であるときそのときに限り収束する．級数 $\sum a_n$ に対してコーシーの判定法 (p.244) を適用すると，収束するための必要十分条件は $n,m\to\infty$ のとき $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|\to 0$ なること．ここで $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$ に注意すれば，各項 a_n の絶対値をとって得られる級数 $\sum |a_n|$ が収束するとき，もとの級数 $\sum a_n$ も収束する．このとき級数 $\sum a_n$ は**絶対収束**するという．級数 $\sum a_n$ に対し，$|a_n|\leq c_n$ を満足するような級数 $\sum c_n$ を**優級数**とよぶ．

【定理 A.19】 収束する優級数をもつ級数は絶対収束する．

優級数として収束判定によく使われるのは**等比級数** $\sum_{n=0}^{\infty} cr^n$, $0<r<1$ と**ディリクレ級数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^s}$, $s>1$ である．

最後に実数の**十進法展開**について述べる．まず 0 以上の整数 n に対し，n を 10 で割った余りを a_0, $10^{-1}(n-a_0)$ を 10 で割った余りを a_1 として，商が 0 になるまでこの操作を続ける．この結果を $a_0, a_1, \cdots, a_k$ として，整数 n を $a_k\cdots a_1a_0$ によって表す．次に $0\leq t<1$ を満たす実数 t に対し，その 10 倍 $10t$ を超えない最大の整数を b_1 とする．b_1 は $0,\cdots,9$ のいずれかである．次に b_2 を $10^2(t-10^{-1}b_1)$ を超えない最大の整数として定義する．この操作を繰り返して 0 から 9 までの整数の列 $b_1, b_2, \cdots$ を得るが，このとき $0.b_1b_2\cdots$ によって t を表す．ただしある番号以上常に 0 が現れるならば，それを省略して表記する．一般の 0 以上の実数 x に対しては，アルキメデスの原理によって x を超えない最大の整数 n が存在するから，整数部分 n の表示を $a_k\cdots a_1a_0$, 小数部分 $x-n$ の表示を $0.b_1b_2\cdots$ と

したとき, x 自身を

$$a_k \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots$$

によって表す. このとき

$$x = \sum_{n=0}^{k} 10^n a_n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} b_n$$

が成立する. 一般にはこの等式を成立させるような 0 から 9 までの整数の列 $a_k \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots$ を十進法展開と呼ぶが, このときには, 例えば $1 = 0.99\cdots$ のように有限表示をもつ実数についてはその表記は一意的でない. 最後に負の実数 x については, 正の $-x$ の表示の前に符号 $-$ をつけてこれを表す習慣である. 以上が実数の十進法表記であるが, この表示が得られたことによって, 公理 $(\mathrm{R}_1) \sim (\mathrm{R}_8)$, および連続性公理を満たす実数 $\boldsymbol{R}$ が一意的であることがわかる.

A.3　いくつかの不等式

ベクトルあるいは関数の p 次ノルムに関する不等式について証明を述べる. 本文中で扱った p 次ノルムは, リーマン積分を念頭においたものであったが, ここでは可測関数のルベーグ積分に関する不等式を扱う. ただし証明自体はリーマン積分に関する不等式と見ても差はない. また簡単のため数列は実数列, 関数は実数値関数とするが, 複素数列, 複素数値関数の場合も同様である.

A.3.1　シュワルツの不等式

最初はおなじみのシュワルツあるいはコーシー-シュワルツの不等式である. 有限次元の場合をコーシー-シュワルツ, 無限次元の場合をシュワルツと呼ぶのが一般的のようである.

【定理 A.20 (コーシー-シュワルツの不等式)】　任意の n 次元ベクトル $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ に対して

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

が成立する．等号成立はベクトル x と y とが一次従属であるとき，そのときに限る．

証明 変数 λ の 2 次多項式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i\lambda+y_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\lambda^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

は常に 0 以上の値をとるから判別式は 0 以下であるが，これがコーシー-シュワルツの不等式そのものである．等号は重根条件であるから $x_i\lambda+y_i=0$ を同時に満たす λ が存在するとき，すなわちベクトル x と y とが一次従属であるとき，そのときに限る． ■

積分に関するシュワルツの不等式およびその証明は，有限次元の場合と本質的に同じであるが念のためくり返す．ただし関数の定義域は n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の領域，すなわち連結な開集合 Ω，積分はルベーグ測度 m によるものとする．また二つの関数 $h, \bar{h}:\Omega\to\boldsymbol{R}$ がこの測度 m に関してほとんど至るところ値が等しいこと，$m\{x; h(x)\neq\bar{h}(x)\}=0$，を $h(x)=\bar{h}(x)$ a.e. で表す．これは連続な関数に対しては $h=\bar{h}$ と同値である．

【定理 A.21（シュワルツの不等式）】 領域 Ω 上定義された実数値可測関数 $f, g:\Omega\to\boldsymbol{R}$ が二乗可積分，すなわち $\int_\Omega (f(x))^2dx<\infty$, $\int_\Omega (g(x))^2dx<\infty$ を満足すれば，積 $f(x)g(x)$ は Ω上可積分であり，不等式

$$\left(\int_\Omega f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_\Omega (f(x))^2dx\int_\Omega (g(x))^2dx$$

が成立する．等号成立は関数 f と g とが一次従属であるとき，すなわち適当な実数 λ が存在して $f(x)=\lambda g(x)$ a.e. あるいは $g(x)=\lambda f(x)$ a.e. が成り立つとき，そのときに限る．

証明 不等式 $|f(x)g(x)|\le\frac{1}{2}\left(|f(x)|^2+|g(x)|^2\right)$ より積 $f(x)g(x)$ は Ω 上可積分であり，したがって任意の実数 λ に対して $(f(x)\lambda+g(x))^2=(f(x))^2\lambda^2+2f(x)g(x)\lambda+(g(x))^2$ も Ω 上可積分となる．有限次元の場合と同じく，この関数の Ω 上の積

分値を λ の 2 次多項式とみて判別式を計算すれば求める不等式と等号成立の条件を得る. ■

領域 Ω 上の二乗可積分関数全体の集合において, ほとんど至るところで値の等しい関数を同一視して得られる空間を $L^2(\Omega)$ とおく (例 2.32, p.100). この空間の元 $f, g \in L^2(\Omega)$ に対して, 内積 $< \, , \, >$ とノルム $\| \ \|_2$ を

$$< f, g >= \int_\Omega f(x)g(x)dx, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{< f, f >}$$

で定義すれば, 有限次元の場合と同じくシュワルツの不等式は次の形をとる.

$$|< f, g >| \ \leq \ \|f\|_2 \|g\|_2$$

A.3.2　ヘルダーの不等式

この項では, ヘルダーの不等式とそれから導かれるミンコウスキの不等式およびノルムの単調性について述べる. 前項 A.3.1 とは逆に積分に関する不等式を証明し, 有限次元の不等式は述べるだけに留める. 最初に次の補題を用意する.

【補題 A.22】　実数 $1 < p, q < \infty$ が $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満足するとき, 任意の正数 a, b に対して

$$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成立する. 等号成立は $a^p = b^q$ のとき, そのときに限る.

証明　対数関数 $\log x$ は $\dfrac{d^2}{dx^2} \log x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ を満たすから, 狭い意味で上に凸である. すなわち任意の $x, y > 0$ および $0 < t < 1$ に対して $t \log x + (1-t) \log y \leq \log(tx + (1-t)y)$, 言い換えれば $x^t y^{1-t} \leq tx + (1-t)y$ が成り立ち, 等号は $x = y$ の場合に限る. これに $t = \dfrac{1}{p}$, $x = a^p$, $y = b^q$ を代入すれば, 求める不等式と等号成立の条件を得る. ■

ヘルダー: Otto Hölder, 1859-1937.

領域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 上の可測関数 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ に対して，その **p次ノルム**を

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

で定義し，これが有限であるとき f を p 乗可積分という．ただし $p=\infty$ に対するノルム $\|\ \|_\infty$ は次で定義される (参照例 2.32, p.100).

$$\|f\|_\infty \;=\; \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)| \;=\; \sup\{a\in\boldsymbol{R};\ m(\{x;\ |f(x)|\geq a\})>0\}$$

【定理 A.23 (ヘルダーの不等式)】 $1\leq p,q\leq\infty$ が $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満足するとき，領域 Ω 上の p 乗可積分関数 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$, q 乗可積分関数 $g:\Omega\to\boldsymbol{R}$ に対して積 $f(x)g(x)$ は Ω 上可積分であり，次の不等式が成立する．

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \;\leq\; \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

ただし $p=1$, $q=\infty$ の場合には

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \;\leq\; \int_\Omega |f(x)|dx\cdot\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|g(x)|.$$

証明　まず $1<p,q<\infty$ の場合を示す．$\|f\|_p=0$ あるいは $\|g\|_q=0$ のときには $f(x)g(x)=0$ a.e. であり不等式は成立する．それ以外のとき $\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ に補題 A.22 を用いれば $\dfrac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\leq\dfrac{1}{p}\dfrac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\dfrac{1}{q}\dfrac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. したがって $|f(x)g(x)|$ および $f(x)g(x)$ は Ω 上可積分で，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \;&\leq\; \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_\Omega |f(x)|^p dx+\frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_\Omega |g(x)|^q dx\\ &=\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \;=\; 1\,.\end{aligned}$$

これより $\left|\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)dx\right|\leq\displaystyle\int_\Omega |f(x)g(x)|dx\leq\|f\|_p\|g\|_q$ を得る．

$p=1$, $q=\infty$ の場合，$a=\mathrm{ess\,sup}\,|g(x)|$ とおけば，$|f(x)g(x)|\leq a|f(x)|$ a.e. より，積 $f(x)g(x)$ は Ω 上可積分であり，$\left|\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)dx\right|\leq\displaystyle\int_\Omega a|f(x)|dx=a\|f\|_1=\|f\|_1\|g\|_\infty$ が成り立つ． ■

有限次元ベクトルに対するヘルダーの不等式は

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

で与えられる. ただし $1 \le p, q \le \infty$ は $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たすと仮定する.

【定理 A.24（ミンコウスキの不等式）】　p 次ノルムは三角不等式を満たす. すなわち領域 Ω 上の p 乗可積分関数 $f, g : \Omega \to \boldsymbol{R}$ に対して $f+g$ は p 乗可積分であり, 次の不等式が成り立つ.

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

証明　まず $|f(x)+g(x)| \le 2|f(x)|$ あるいは $|f(x)+g(x)| \le 2|g(x)|$ のいずれかが成り立つことから $|f(x)+g(x)|^p \le 2^p|f(x)|^p + 2^p|g(x)|^p$ であり, 和 $f+g$ が p 乗可積分であることが従う. 次に $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ より $|f(x)+g(x)|^p \le |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$ となるが, $\left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q = |f(x)+g(x)|^p$ に注意すればヘルダーの不等式は $\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p\|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p\|f+g\|_p^{p/q}$ を導く. この両辺を $\|f+g\|^{p/q}$ で割れば, $p-p/q=p/p=1$より求める不等式が得られる. ■

領域 Ω 上の p 乗可積分関数 $f, g : \Omega \to \boldsymbol{R}$ が $\|f-g\|_p = 0$ を満たすのは $f(x)=g(x)$ a.e. なるとき, そのときに限る. したがってこのような関数を同一視して得られる空間を $L^p(\Omega)$ と書けば, $\|\ \|_p$ は $L^p(\Omega)$ 上のノルムとなる (例 2.32, p.100). さらに $1 \le p < \infty$ の場合, ミンコウスキの不等式 $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ の等号が成立するのは f と g とが $L^p(\Omega)$ の元として一次従属であるとき, そのときに限る. 有限次元の場合のミンコウスキの不等式は次で与えられる.

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

最後に積分領域 Ω の体積が有限であるとき, p 次ノルムの間には強弱の関係があることを示す.

【定理 A.25（ノルムの単調性）】　領域 Ω の体積 $\mathrm{vol}(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega dx$ が有限であると

する．このとき p, q が $1 \leq p \leq q \leq \infty$ を満たすならば，任意の q 乗可積分関数 $f : \Omega \to \boldsymbol{R}$ は p 乗可積分であり，次の不等式が成立する．

$$\mathrm{vol}(\Omega)^{-1/p} \|f\|_p \ \leq \ \mathrm{vol}(\Omega)^{-1/q} \|f\|_q$$

証明　$r = \dfrac{q}{p}$ とおき，$\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$ を満たす s をとる．このとき関数 $|f(x)|^p$ が r 乗可積分であり，また値 1 をとる定数関数 1 が s 乗可積分であることから，ヘルダーの不等式を用いれば $|f(x)|^p \cdot 1$ が可積分，すなわち $f(x)$ は p 乗可積分で

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx \ \leq \ \left(\int_\Omega |f(x)|^q \right)^{p/q} \left(\int_\Omega dx \right)^{1/s}.$$

両辺の p 乗根をとって整理すれば，求める不等式が得られる．■

章末問題解答

第1章

1. (1) $d'(x,y)\geq 0$, $d'(x,y)=d'(y,x)$ は明らか．また $d'(x,y)=0$ ならば $d(x,y)=0$ より $x=y$ である．三角不等式は d についての不等式 $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$ と，一次分数関数 $\dfrac{t}{1+t}=1-\dfrac{1}{1+t}$ が t に関して単調増加であることから，$d'(x,y)+d'(y,z)\geq$ $\dfrac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)d(y,z)}\geq\dfrac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\geq\dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)}$ として得られる．

(2) $d(x,y)\to 0$ のとき $d'(x,y)\to 0$ であり，また $d(x,y)=\dfrac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)}$ より，$d'(x,y)\to 0$ のとき $d(x,y)\to 0$ が成り立つから，d と d' とは同じ位相を X に定義する．

2. $|I(f)-I(g)|=\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)-g(t)dt\right|\leq\displaystyle\int_0^1 |f(t)-g(t)|dt=\|f-g\|_1\leq\|f-g\|_\infty$ より，写像 $I:f\mapsto I(f)$ は d_1, d_∞ いずれに関しても連続である．

3. $1\leq p<\infty$ なる p に対して関数 $f_n:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を，$0\leq x\leq\frac{1}{n}$ のとき $f_n(x)=\sqrt[p]{n(1-nx)}$ で，$\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ のとき $f_n(x)=0$ で定義する．そうすると $\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|^q dx=n^{\frac{q}{p}-1}\frac{p}{p+q}$ より $\|f_n\|_q=n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\frac{p}{p+q}\right)^{\frac{1}{q}}$．よって $q<p$ に対しては $n\to\infty$ のとき $\|f_n\|_q\to 0$ であるから関数列 $\{f_n\}$ は q 次ノルムに関して 0 に収束する．一方 $q=p$ の場合には $\|f_n\|_p=2^{-\frac{1}{p}}$ であるから，$\{f_n\}$ は p 次ノルムに関しては 0 に収束しない．$p=\infty$ に対しては $f_n(t)=t^n$ で定義される関数列を考えればよい．

4. (1) $p<\infty$ の場合に示す．$x\in\ell^p$ のスカラー倍が再び ℓ^p に属することは容易に示される．和については，$x,y\in\ell^p$ に対して有限次元のミンコウスキの不等式より $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^N|x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\displaystyle\sum_{n=1}^N|y_n|^p\right)^{1/p}\geq\left(\displaystyle\sum_{n=1}^N|x_n+y_n|^p\right)^{1/p}$ が成り立つから，この不等式で $N\to\infty$ とすれば $\|x+y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p$．したがって $x+y\in\ell^p$ であること，および $\|\ \|_p$ についての三角不等式が同時に示された．

(2) $1\leq p<\infty$ とし，数列 $x\in\ell^p$ をとる．$\sum|x_n|^p<\infty$ より $|x_n|>1$ なる n は有限個であるから，N を大きくとって $n>N$ に対しては $|x_n|\leq 1$ となるようにできる．このとき $\sup_n|x_n|\leq\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,1\}$ より $x\in\ell^\infty$ であり，また $p\leq q<\infty$ な

る q について $\sum_n |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n|^q + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ より $x \in \ell^q$ でもある．一方で $x_n = (1/n)^{1/p}$ で定義される数列 $x = (x_n)$ は，$\sum 1/n = \infty$ より ℓ^p には属さないが，$q > p$ のとき $\sum n^{-q/p} < \infty$ より ℓ^q には属す．

5.　数列 $\{p^n\}_{n=1,2,\cdots}$ は $d_p(p^n, 0) = a^{-n}$ より p-進位相のもとでは 0 に収束するが，一方で $d_q(p^n, 0) = 1$ であるから q-進位相のもとでは 0 には収束しない．

6.　(1)　不等式 $d_1(f,g) \leq d_\infty(f,g)$ は明らかであるから，d_1 の値で d_∞ を評価することを考える．$\|f\|_\infty \geq \varepsilon$ と仮定すると $|f(t_0)| \geq \varepsilon$ なる点 t_0 が存在する．$\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$ とおくと，$f \in \mathrm{Lip}_K[0,1]$ であるから，$|t - t_0| \leq \delta$ のとき $|f(t)| \geq \varepsilon - K|t - t_0|$．$\varepsilon$ が小さいとき，区間 $[t_0 - \delta, t_0]$ と $[t_0, t_0 + \delta]$ の少なくとも一方は $[0,1]$ に含まれるから，例えば $[t_0 - \delta, t_0] \subset [0,1]$ とすれば (図 B.1)

$$\|f\|_1 \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0} |f(t)|dt \geq \int_0^\delta \frac{s}{K} ds = \frac{\varepsilon^2}{2K}\,.$$

これより $d_1(f,g) < \dfrac{\varepsilon^2}{2K}$ ならば $d_\infty(f,g) < \varepsilon$．したがって d_1 と d_∞ は $\mathrm{Lip}_K[0,1]$ 上同じ位相を定義する．

(2)　$f_n(t) = t^n$ なる関数列を考えれば，$\left|\dfrac{df_n}{dt}\right| \leq n$ より $f_n \in \mathrm{Lip}_n[0,1] \subset \mathrm{Lip}[0,1]$ である．ここで $\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |t^n| dt = \frac{1}{n+1}$ より $d_1(f_n, 0) \to 0$ であるが，一方 $\|f_n\|_\infty = \displaystyle\sup_{0 \leq t \leq 1} |t^n| = 1$ より $d_\infty(f_n, 0) \not\to 0$．

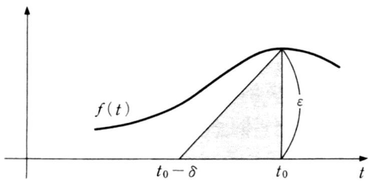


図 B.1

7.　部分集合 $A = \{p; f(p) \geq 0\}$ は $A' = \{p; f(p) > 0\}$ と $A'' = \{p; f(p) = 0\}$ との直和として表されるが，A' は連続関数によって不等号を用いて定義されているから開集合で，したがって A の内部 $\mathring{A}$ に含まれる．また任意の $p_0 \in A''$ に対し，偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0)$ のいずれかが 0 でないことから，陰関数定理によって，p_0 のまわりで関数 f を一つの成分とするような局所座標が存在する．特に p_0 のいくらでも近くに $f(p) > 0$ を満たす p, および $f(p) < 0$ を満たす p が存在するから，p_0 は部分集

合 $A=\{p; f(p)\geq 0\}$ の境界点である．したがって A'' は A の境界 $\dot{A}$ に含まれる．一方で A 自身，連続関数 f によって等号つきの不等号を用いて定義されているから閉集合であり，その閉包が A と一致するから，$A=A'\sqcup A''$ がちょうど内部と境界への直和分割を与える．

8. 閉集合の積 $F\times F'$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ であって，全空間 $X\times Y$ で (x_∞, y_∞) に収束するものをとる．このとき $x_n\to x_\infty$ および F が閉集合であることから $x_\infty\in F$．同様に $y_\infty\in F'$ であるから $(x_\infty, y_\infty)\in F\times F'$．したがって $F\times F'$ は $X\times Y$ の閉部分集合である．U, U' をそれぞれ X, Y の開集合とするとき，$U^c\times Y$ および $X\times U'^c$ がともに $X\times Y$ の閉部分集合であることから，その和 $U^c\times Y\cup X\times U'^c$ も閉集合．したがって補集合 $(U^c\times Y\cup X\times U'^c)^c=U\times U'$ は開部分集合である．$U\times U'$ が開集合であることの直接証明については p.76 を参照されたい．

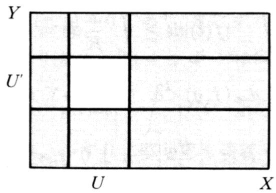


図 B.2

9. 写像 $T: V\times V\times V\to V\times V$, $(x,y,z)\mapsto(x-z, y-z)$ を考えれば，問題の集合は原点 O と同一直線上にあるような $x, y\in V$ の組全体のなす $V\times V$ の部分集合 A の，T による逆像 $T^{-1}(A)$ と一致する．写像 T は連続であるから，この A が閉集合であること，すなわち A の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ が $V\times V$ 内で収束するとき，極限 (x_∞, y_∞) が A に属することをいえばよい．実数 a_n を $x_n=a_n y_n$ を満たすようにとる．この数列 $\{a_n\}$ が有界な部分列をもつ場合，さらにその部分列 $\{a_{n'}\}$ を選んで，これが収束すると仮定してよい (ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理, p.243)．その極限を a_∞ とおけば

$$\|x_\infty - a_\infty y_\infty\| \;\leq\; \|x_\infty - x_{n'}\| + |a_\infty|\|y_\infty - y_{n'}\| + |a_\infty - a_{n'}|\|y_{n'}\| \;\to\; 0$$

より $x_\infty=a_\infty y_\infty$．すなわち極限 (x_∞, y_∞) は A に属する．$\{a_n\}$ が有界な部分列をもたないときには，$y_n=\dfrac{1}{a_n}x_n$ において $n\to\infty$ とすれば $y_\infty=0$．したがってこの場合も (x_∞, y_∞) は A に属する．

10. (1) $\varepsilon=2^{-K}$ に対して，点 $x=(x_n)\in F\times A\times\cdots$ の ε-近傍の任意の点 $y=(y_n)$ は，その第 K 座標までが x と一致するから $y\in F\times A\times\cdots$．したがって $U=F\times A\times\cdots$ は開集合である．

(2) 一点 $(0,0,\cdots)$ からなる集合は閉集合であるが, その補集合は (1) で与えた形ではない.

11. (1) まず $x\in\ell^\infty$ に対して $\limsup x_n$ が存在すること, またその ε-近傍の任意の元 $y\in U(x;\varepsilon)$ に対して $|\limsup y_n - \limsup x_n|<\varepsilon$ が成り立つことに注意する. これは下極限 $\liminf x_n$ に関しても同様. さて $x=(x_n)\notin\ell_{\mathrm{conv}}$ ならば $\limsup x_n\neq\liminf x_n$. $\varepsilon>0$ を上極限と下極限の差よりも小さくとれば, 任意の $y\in U(x;\varepsilon/3)$ に対して $\limsup y_n\geq\limsup x_n-\varepsilon/3$, $\liminf y_n\leq\liminf x_n+\varepsilon/3$ より $\limsup y_n\neq\liminf y_n$. ゆえに $y\notin\ell_{\mathrm{conv}}$. これは ℓ_{conv}の補集合が開集合であること, したがって ℓ_{conv}が閉集合であることを示している.

(2), (3)　上で述べたことによって x にその上極限 $\limsup x_n$ を対応させる関数は ℓ^∞ 上連続である. 問題の $x\mapsto\lim x$ は ℓ_{conv}への, この関数 $x\mapsto\limsup x_n$ の制限にほかならないから, それ自身連続であってしかも ℓ 上への連続な拡張をもつ.

12. (1) 点 $(x_0,y_0)\in A$ が $x_0=0$ を満たす場合には, L_n 上の点 $(y_0/n,y_0)$ が $n\to\infty$ のとき (x_0,y_0) に収束するから, (x_0,y_0) は A の内部には含まれない. 一方 $x_0\neq0$ の場合には, $\dfrac{y_0}{x_0}<1$ あるいは $m<\dfrac{y_0}{x_0}<m+1$ を満たす m が存在する. いずれの場合にも $\varepsilon>0$ を小さくとれば, (x,y) の ε-近傍の点 (x,y) は同じ条件を満たす. よってこの (x_0,y_0) は A の内部に属する. したがって A の内部は, y-軸を $Y=\{(0,y);y\in\boldsymbol{R}\}$ と表せば $\mathring{A}=\boldsymbol{R}^2\setminus\left(Y\cup\bigcup_n L_n\right)$ で与えられる. A の閉包 $\overline{A}$ は, 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の任意の点が A の点, すなわち $\dfrac{y}{x}$ が整数でないような (x,y) で近似できることから全平面 $\boldsymbol{R}^2$ と一致する. 最後に境界 $\dot{A}$ は, 閉包 $\overline{A}$ と内部 $\mathring{A}$ との差集合であるから $Y\cup\bigcup_n L_n$ で与えられる.

(2) 各 $\varepsilon>0$ に対して, 開集合 $\{(x,y);x^2+y^2<1-\varepsilon\}$ に含まれる B の元は有限個であるから, このような点は B の孤立点である. 一方で B の任意の元は適当な $\varepsilon>0$ に対して $\{(x,y);x^2+y^2<1-\varepsilon\}$ に含まれる. したがって B の各点は孤立点である. また同じ理由によって B の集積点は開集合 $\{(x,y);x^2+y^2<1\}$ には存在しないが, B の各点は閉集合 $\{(x,y);x^2+y^2\leq1\}$ に含まれているから, 集積点は単位円周 $S^1=\{(x,y);x^2+y^2=1\}$ 上にのみ存在する. 一方で任意の $(x,y)\in S^1$ は $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$, $0\leq\theta<2\pi$ と表すことができる. ここで各自然数 N に対して $1\leq k\leq N$ を, 比 $\dfrac{k}{N}$ が $\dfrac{\theta}{2\pi}$ を近似するように選べば, $N\to\infty$ に対して $\left(r_N\cos\dfrac{2\pi k}{N},r_N\sin\dfrac{2\pi k}{N}\right)\to(x,y)$. したがって単位円周 S^1 上のすべての点が B の集積点である.

13. 連続関数の零点集合は閉であるから, A の補集合が稠密であることをいえばよい. これを次元 n に関する帰納法で示す. $n=1$ のとき A は有限集合であるから主張は正しい. n まで証明されたと仮定する. $n+1$ 変数の多項式 p を考えるのであるが, 第 $n+1$ 変数を他と区別するため w と書く. このとき $p(z,w)$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$ を w に関して $p(z,w)=p_0(z)+\cdots+p_k(z)w^k$ と整理する. $p(z,w)$ が 0 でないことから, どれかの $p_\ell(z)$ は 0 でない. したがって帰納法の仮定より, 任意の $z\in\boldsymbol{C}^n$ のいくらでも近くに $p_\ell(z')\neq 0$ を満たす $z'\in\boldsymbol{C}^n$ が存在する. この z' に対して $p(z',w)$ は 0 でない多項式であるから, やはり任意の $w\in\boldsymbol{C}$ のいくらでも近くに $p(z',w')\neq 0$ を満たす $w'\in\boldsymbol{C}$ が存在する. すなわち $n+1$ 変数多項式についても零点集合の補集合は稠密である.

第2章

1. (1) 条件 (U_1^*), (U_2^*) は自明. N, N' がともに G の指数有限正規部分群であるとき, $N\cap N'$ も正規部分群であり, その指数 $[G:N\cap N']$ が $[G:N][N:N\cap N']$ と一致して有限であることから (U_3^*) が成立する (群の第三準同型定理). また (U_5^*) は, $g'\in gN$ のとき $g^{-1}g'\in N$, したがって $g'N=gN$ が成り立つことから正しい.

(2) 演算 $\varphi: G\times G\to G$, $(g,h)\mapsto g^{-1}h$ の連続性をいえばよい. $\varphi(g,h)=g^{-1}h$ の基本近傍 $g^{-1}hN\in\mathfrak{U}^*(g^{-1}h)$ に対して, g, h の近傍 gN, hN をとれば, φ による像が $\varphi(gN,hN)=(gN)^{-1}hN=Ng^{-1}hN=g^{-1}hN$ で与えられることから φ は連続である. この計算で N が正規部分群であることを用いた.

(3) $\boldsymbol{Q}$ の指数有限部分群は $\boldsymbol{Q}$ 自身だけであるから, クルル位相は密着位相である.

2. 写像 φ が p で連続ならば $p_n\to p$ のとき $\varphi(p_n)\to\varphi(p)$ となる. 逆に φ が p で連続でなければ, $\varphi(p)$ の適当な近傍 V に対して $\varphi^{-1}(V)$ は p の近傍ではない. そうすると $\mathfrak{U}^*(p)=\{U_1,U_2,\cdots\}$ を減少列よりなる p の可算基本近傍系とするとき, すべての U_n は $\varphi^{-1}(V)$ に含まれない. このとき $p_n\in U_n\setminus\varphi^{-1}(V)$ なる p_n を選んで点列 $\{p_n\}$ を作れば, この点列は p に収束するけれども, $\varphi(p_n)\notin V$ であるから $\{\varphi(p_n)\}$ は $\varphi(p)$ には収束しない.

3. (1) 条件 (O_1) は定義より成り立つ. 条件 (O_2) については, $O_1,O_2\in\mathfrak{O}$ に対して, 例えば O_1 が空集合のときには $O_1\cap O_2=O_2$ より, また双方が空でないときには $(O_1\cap O_2)^c=O_1^c\cup O_2^c$ が高々可算集合であることより $O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}$ が従う. 和集合については, 族 $O_\lambda\in\mathfrak{O}$ をとるとき, すべての O_λ が空集合であれば $\bigcup O_\lambda=\emptyset$ より, またどれかの O_λ が空でないときには $\left(\bigcup O_\lambda\right)^c=\bigcap O_\lambda^c$ が高々可算集合であることより条件 (O_3) が成立する.

(2) 点 p と異なる p_n 全体の集合を A と書くとき, これは高々可算集合. したがって補集合 $U=X\setminus A$ は p を含む開集合だから p の近傍である. $p_n\neq p$ なる元 p_n はこの U には含まれないから, このような n が無限個存在すれば点列 $\{p_n\}$ は p には収束しない.

(3) 上で述べたことから位相 $\mathfrak{O}$ に関して $p_n\to p$ ならば, 有限個の n を除いて $p_n=p$ であり, したがって離散位相に関しても $p_n\to p$. 一方で X が非可算集合であることから $\mathfrak{O}$ に属さない X の部分集合が存在し, $\mathfrak{O}$ の定義する位相は離散位相よりも真に弱い.

4. (1) 包含写像と微分作用素が連続となるような $C^\infty[0,1]$ の位相 $\mathfrak{O}$ を考える. 関数 $f\in C^\infty[0,1]$ に対して $U_{r,\varepsilon}(f)=\{g;\|g-f\|_{(r)}<\varepsilon\}$ がこの位相 $\mathfrak{O}$ に関しても f の近傍であることをいえばよい. これを r に関する帰納法で示す. $r=0$ の場合の $U_{0,\varepsilon}(f)$ は, 一様ノルムに関する $f\in C[0,1]$ の ε-近傍の $C^\infty[0,1]$ への制限であるから, 包含写像に関する連続性の仮定より $\mathfrak{O}$ に関しても f の近傍である. $r-1$ まで示されたと仮定する. このとき $D:C^\infty[0,1]\to C^\infty[0,1]$ の連続性から $D^{-1}(U_{r-1,\varepsilon}(Df))=\{g;\ \|Dg-Df\|_{(r-1)}<\varepsilon\}$ は f の近傍である. ここで $\|h\|_{(r)}=\|h\|_{(0)}+\|D(h)\|_{(r-1)}$ より, $U_{r,\varepsilon}(f)$ は $U_{0,\varepsilon/2}(f)$ と $U_{r-1,\varepsilon/2}(D(f))$ との共通部分を含むから, やはり f の近傍である. したがって帰納法によりすべての $U_{r,\varepsilon}(f)$ が f の近傍であることが示された.

(2) まずノルム $\|\ \|_{(r)}$ を有界な距離関数 d_r で置き換える. 具体的には $d_r(f,g)=\min\{\|f-g\|_{(r)},1\}$ とし, この族を用いて $d(f,g)=\sum\dfrac{1}{2^r}d_r(f,g)$ で定義される距離関数を考える. このとき $U_{r,\varepsilon}(f)$ は d に関する f の $\varepsilon/2^r$-近傍を含むから, 距離 d に関しても f の近傍である. 一方で $\varepsilon>0$ に対して r を $1/2^r<\varepsilon/2$ を満たすようにとれば, d に関する f の ε-近傍は $U_{r,\varepsilon/2}(f)$ を含むから, C^∞位相に関しても f の近傍である. したがって C^∞位相は距離 d によって定義される位相と等しい.

5. 点 p の座標を (p_x,p_y) とするとき, $\mathfrak{O}$ の開集合 O_p に $A\in X$ が属する条件は $(c_x(A)-p_x)^2+(c_y(A)-p_y)^2<r(A)^2$ で, 開集合 O'_p に A が属する条件は $(c_x(A)-p_x)^2+(c_y(A)-p_y)^2>r(A)^2$ でそれぞれ表されるから, O_p, O'_p とも相対位相に関する開集合である. 逆に X を $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合と見たときの $A\in X$ の ε-近傍 $U(A;\varepsilon)$ が, 位相 $\mathfrak{O}$ のもとでも A の近傍であることをいえば, これら二つの位相が等しいことが示される. ε を $\varepsilon<r(A)$ を満たすようにとり, A の同心円で半径が $r(A)-\varepsilon$, $r(A)+\varepsilon$ であるものを, それぞれ A', A'' とおく. 自然数 $N\geq 4$ を, A' に外接する正 N 角形がもとの A に含まれるように, また A'' に内接する正 N 角形が内部に A を含むようにとる. これらの正 N 角形のうち A に含まれるものの頂点を $p_1,\cdots,p_N$, A を内部に含むものの頂点を $q_1,\cdots,q_N$ とおく. このとき $\bigcap O_{p_i}$ に属

する円は, A' をその内部に含むから, 特にその半径は $r(A)-\varepsilon$ より大きい. これより $(\bigcap O_{p_i})\cap(\bigcap O'_{q_j})$ に属する円 B の半径は$r(A)-\varepsilon<r(B)<r(A)+\varepsilon$を満たし, また中心は $d((c_x(B),c_y(B)),(c_x(A),c_y(A))<2\varepsilon$ を満たす (図 B.3). したがって $U(A;\varepsilon)$ は $\mathfrak{O}$ に関しても A の近傍である.

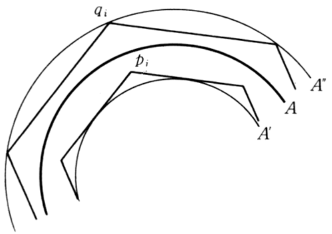


図 B.3

6. (1) 任意の $b\in\boldsymbol{R}$ に対し, f_λ の連続性から $\{x;f_\lambda(x)<b\}$ は X の開集合. これより $\{x;f(x)<b\}=\bigcup\{x;f_\lambda(x)<b\}$ も開集合であり, f は上半連続である.

(2) 関数 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}$ を $f(t)=0,\ t\neq1,\ f(1)=1$ で定義すれば, これは上半連続であるが連続ではない. この f は連続関数列 $f_n(t)=t^n,\ \ n=1,2,\cdots$ の下限として与えられることに注意する.

7. (i) を仮定し, 数列 $\{x_n\}$ が x_∞ に収束すると仮定する. 実数 b が $f(x_\infty)<b$ を満たすとき, $\{x;f(x)<b\}$ が開集合であることから, 十分大きい n について $f(x_n)<b$. したがって $\limsup f(x_n)\geq b$. $f(x_\infty)<b$ は任意であったから $\limsup f(x_n)\leq f(x_\infty)$. よって (ii) が成り立つ. (ii) が (iii) を導くことは自明. 最後に (iii) を仮定すると, 任意の実数 b に対して, $\{x;f(x)\geq b\}$ は点列の極限をとる操作について閉じているから閉集合であり, したがってその補集合 $\{x;f(x)<b\}$ は開集合となる. すなわち (i) が成立する.

8. 積空間 $X\times Y$ の開集合は, X の開集合 O_X と Y の開集合 O_Y との積として表される基本開集合 $O_X\times O_Y$ の和として表される. 基本開集合の射影 pr_X による像は O_X で, これは開集合であったから pr_X は開写像である.

9. (1) $O\subset A$ を空集合 $\emptyset$, 全体集合 A 以外の開集合とし, O_λ を A_λ の対応する部分集合とする. $p\in O$ をとり, 点 $x=(x_\lambda)$ を $x_\lambda=p$ で定義する. この x が可算基本近傍系 $U_n,\ n=1,2,\cdots$ をもったと仮定する. 各 U_n は p をその元とする $\prod_\lambda A_\lambda$ の開集合を部分集合として含む. したがって位相の定義から Λ の有限部分集合 Λ_n が存在して, U_n は $\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_n}\}\times\prod_{\lambda\notin\Lambda_n}A_\lambda$ を部分集合として含む. このような Λ_n すべての和を Λ_∞ と書くと, これは高々可算集合であり, 部分集合 $\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\infty}\}\times\prod_{\lambda\notin\Lambda_\infty}A_\lambda$

は x の任意の近傍に含まれることとなる．一方で Λ は非可算集合であるから，$\bar{\lambda}\notin\Lambda$ なる添数 $\bar{\lambda}$ が存在する．このとき $O_{\bar{\lambda}}\times\prod_{\lambda\neq\bar{\lambda}}A_\lambda$ なる部分集合は x の開近傍であるが，$y\notin O$ なる y が存在することから，$\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_\infty}\}\times\prod_{\lambda\notin\Lambda_\infty}A_\lambda$ を部分集合としては含まない．これは矛盾であり，$\prod_\lambda A_\lambda$ が第一可算公理を満たさないことが示された．

(2) $\boldsymbol{R}$ を縮めた一点 $a\in\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{R}$ が可算基本近傍系をもたないことをいう．もしこの点が可算基本近傍系をもてば，もとの空間 $\boldsymbol{R}^2$ において，部分集合 $\boldsymbol{R}$ を含む開集合の可算族 U_n, $n=1,2,\cdots$ が存在して，$\boldsymbol{R}$ を含む任意の開集合 O はどれかの U_n を部分集合として含むことになる．さて各 U_n は $\boldsymbol{R}$ を含む開集合であるから，適当な $\varepsilon_n>0$ に対して (n,ε_n) をその内部に含む．こうして選んだ (n,ε_n) を順次結んで折れ線を定義し，その折れ線の下側にある点の全体からなる集合 O を考える (図 B.4)．ただし簡単のため $\varepsilon_n=1$, $n\leq 0$ とする．そうすると定義より，この O は開集合で $\boldsymbol{R}$ を部分集合として含む．一方で任意の n に対し，O は (n,ε_n) を含まないから，どの U_n をも部分集合として含むことはない．これは矛盾であり，したがって商空間 $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{R}$ は第一可算公理を満足しない．

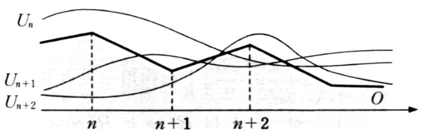


図 B.4

10. (1) 各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対して開区間 $I_n=\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n-1}\right)$ をとれば，I_n の f による逆像は n 一点よりなる集合 $\{n\}$ である．したがって f による誘導位相は離散位相である．

(2) すべての素数を $p_1,p_2,\cdots$ と順に並べ，これから $a_n=1+p_1p_2\cdots p_n$ によって定義される $\boldsymbol{N}$ の数列 $\{a_n\}$ を考える．すべての素数 p に対して n が十分大きければ $g_p(a_n)=1$ であるが，誘導位相のもとでの数列の収束は各 g_p による像の収束で判定できるから，この数列は 1 に収束する．したがって g_p による誘導位相は離散位相とは異なる．

11. まず空間 $\boldsymbol{R}/[a,b]$ について．写像 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ を $\varphi(x)=x$ $(x\leq a)$, $\varphi(x)=a$ $(a\leq x\leq b)$, $\varphi(x)=x+a-b$ $(b\leq x)$ で定義すると，この φ は連続な全単射 $\bar{\varphi}:\boldsymbol{R}/[a,b]\to\boldsymbol{R}$ を導く．逆写像 $\bar{\varphi}^{-1}$ は $\boldsymbol{R}\setminus\{a\}$ では連続であり，また $\boldsymbol{R}$ において $[a,b]$ を含む開集合 U が，適当な $\varepsilon>0$ に対して開区間 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ を含むことから点 $a\in\boldsymbol{R}$ でも連続である．したがって商空間 $\boldsymbol{R}/[a,b]$ は実数空間 $\boldsymbol{R}$ と同相である．次に空間 $\boldsymbol{R}/(a,b)$ について．(a,b) を同一視した点を p と書くと，$\boldsymbol{R}/(a,b)$ は集合としては $(-\infty,a]\sqcup\{p\}\sqcup[b,\infty)$

と等しい．このうち $(-\infty, a) \subset (-\infty, a]$ 上での位相は通常の開区間の位相と一致するが，a の近傍は，適当な $\varepsilon > 0$ に対して $(a-\varepsilon, a] \sqcup \{p\}$ を含む集合として与えられる．$[b, \infty)$ に関しても同様．また p については，(a, b) が開集合であることから $\{p\}$ が開集合であり，p を含む任意の集合がその近傍である．

12. 射影平面から埋め込まれた円板の内部を除いた空間はメビウスの帯と同相であるから(2.3節 例題, p.101)，二つのメビウスの帯を対応する辺で貼りあわせた空間を考えればよい．メビウスの帯は正方形の一対の辺を逆向きに同一視して得られるから(例 2.25, p.92)，これを二つ合わせれば，射影平面の連結和が正方形を図 B.5 のように貼り合わせた空間と同相であることがわかる．これはクラインの壺にほかならない．

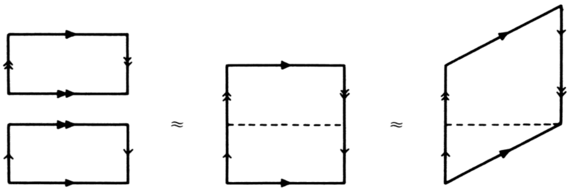


図 B.5

13. (1) $\psi_{(n,m)}$ を $\boldsymbol{Z}^2$ の $\boldsymbol{R}^2$ への通常の作用，$\psi_{(n,m)}(x, y) = (x+n, y+m)$ とすると，線形写像 $L : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $(x, y) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ は作用 φ を作用 ψ に変換する．すなわち $\varphi_{(n,m)} \circ L = L \circ \psi_{(n,m)}$．したがって L は $\boldsymbol{R}^2/\varphi$ と $\boldsymbol{R}^2/\psi \approx T^2$ との同相写像を導く．

(2) 点 $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対して (n, m) を，距離 $d((x, y), \varphi_{(n,m)}(O))$ が最小になるように選ぶ．そうすると各 $\varphi_{(n,m)} : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ が距離を保つことから $(x, y) \in \varphi_{(-n,-m)}(A)$ であり，これより $\bigcup \varphi_{(n,m)}(A) = \boldsymbol{R}^2$ が従う．次に $(x, y) \in A \cap \varphi_{(n,m)}(A)$, $(n, m) \neq (0, 0)$ であれば，(x, y) をベクトル $\left(n + \frac{1}{2}m, \frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$ 方向に少し動かした点 (x', y') は O より $\varphi_{(n,m)}(O)$ の方が近い．したがって $(x', y') \notin A$ であり，これはもとの (x, y) が A の境界に属することを示している．具体的な A の形を求めるには，原点 O に近い O の軌道の元 $\varphi_{(n,m)}(O)$，この場合は $(n, m) = (0, \pm 1)$, $(n, m) = (\pm 1, 0)$, $(n, m) = (\pm 1, \mp 1)$ を列挙し，次におのおのと原点を結ぶ線分の垂直二等分線を引けば，これらで囲まれる領域が A である (図 B.6)．境界に導かれる同値関係は図示したとおりである．

14. (1) $\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ の生成元の正方形への作用は $\varphi : (x, y) \to (-y, x)$ で与えられる．同一視される点 $(s, \pm 1)$, $(\pm 1, t)$ の φ による像は $(\mp 1, s)$, $(-t, \pm 1)$ であり，これらはそれ

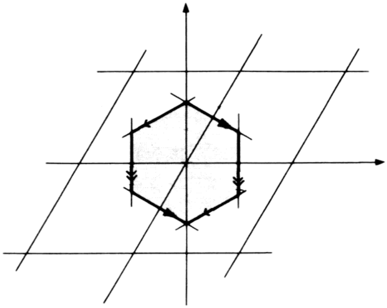


図 B.6

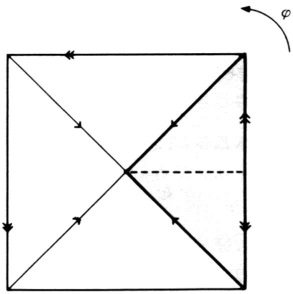


図 B.7

ぞれ同一視されるから φ は連続写像 $\bar{\varphi}: T^2 \to T^2$ を導く．また $\varphi^4 = \mathrm{id}$ より $\bar{\varphi}^4 = \mathrm{id}$ である．

(2)　$\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ の正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ への作用の基本領域として直角三角形 $\triangle = \{(x,y);\ |y| \leq x \leq 1\}$ をとることができる (図 B.7)．このとき境界に導かれる同値関係は $(x,-x) \sim (x,x)$ で与えられる．$\boldsymbol{Z}/4\boldsymbol{Z}$ の T^2 への作用の基本領域として，この $\triangle$ に，さらに同値関係 $(1,y) \sim (1,-y)$ を入れた空間をとることができる．これら二つの同一視を合わせて得られる等化空間が求める軌道空間であるが，これは二つの円板を境界で貼り合わせた空間であるから球面と同相である．

第 3 章

1.　$\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ と仮定する．このとき $z \in \overline{A} \cap \overline{B}$ に対し，これにいくらでも近い $x \in A$ および $y \in B$ が存在するから $\bar{d}(A,B) = 0$ である．しかし平面 $\boldsymbol{R}^2$ の閉部分集合 $A = \{(x,y);\ x=0\}$ と $B = \{(x,y);\ xy=1\}$ について，これらは共通部分をもたないが，$(0,n) \in A$ と $(1/n, n) \in B$ との距離が $1/n$ であることから $\bar{d}(A,B) = 0$．したがって逆は必ずしも成立しない．

2.　(1) と (2) は双対命題であるから，(1) を示せば十分である．A を距離空間 X の閉部分集合とし，点 $x \in X$ と部分集合 A との距離を $\bar{d}(x,A)$ とおく．この $\bar{d}(\cdot, A)$ は連続関数であるから $U(A;\varepsilon) = \{x;\ \bar{d}(x,A) < \varepsilon\}$ は開集合で，しかも $\bigcap_{\varepsilon>0} U(A;\varepsilon) = \overline{A} = A$ を満たす．したがって $U(A;1) \supset \cdots \supset U(A;1/n) \supset \cdots$ が条件を満たす減少列を与える．

3.　共通部分のない閉集合 $F_n, \overline{F_{n+1}^c}$ に対し，連続関数 $g_n : X \to [0,1]$ であって $g_n^{-1}(0) = F_n$, $g_n^{-1}(1) = \overline{F_{n+1}^c}$ を満たすものが存在する．この関数族 $\{g_n\}$ を用いて，新たな関

数 $g: X \to \boldsymbol{R}$ を $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ で定義する．まずこの形式和の正当性を調べよう．$X=\bigcup F_n$ であるから，任意の $x_0 \in X$ に対し適当な k をとれば $x_0 \in F_k$ が成り立つ．このとき $x_0 \in \mathrm{Int}F_{k+1}$ であり，F_{k+1} 上ではすべての $n \geq k+1$ に対して $g_n(x)=0$ であるから，x_0 を含む開集合 $\mathrm{Int}F_{k+1}$ 上で $g(x)$ は有限和 $\sum_{n=0}^{k} g_n(x)$ で与えられる．したがって和 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ は各点で意味をもち，かつ連続である．しかも $x \in F_k$ ならば $g_k(x)=0$ より $g(x) \leq k$ であり，また $x \notin F_k$ ならば $g_0(x)=\cdots=g_{k-1}(x)=1$ かつ $g_k(x)>0$ であるから $g(x)>k$．したがって g が求める関数である．

4.　$\mathfrak{O}$ を第一分離公理を満たす $\boldsymbol{C}$ の位相とする．このとき各点 $p \in \boldsymbol{C}$ に対して $\{p\}$ は閉集合であるから $\boldsymbol{C} \setminus \{p\}$ は $\mathfrak{O}$ の開集合．一方でザリスキ位相はこの部分集合によって生成されているから，$\mathfrak{O}$ はザリスキ位相よりも強い．

5.　第一分離公理は一点よりなる部分集合が閉集合であることと同値であった．X, Y を第一分離公理を満たす位相空間とする．$A \subset X$ を部分空間，$x \in A$ をその一点とするとき，$\{x\}$ は X の閉集合であるから部分空間 A の閉集合でもある．したがって A は第一分離公理を満足する．次に積空間 $X \times Y$ を考える．任意の $x \in X$ および $y \in Y$ に対して $\{x\}, \{y\}$ はそれぞれ X および Y の閉部分集合．積空間においては閉集合の積はまた閉集合となるから，$\{(x,y)\}$ は $X \times Y$ の閉部分集合であり，よって $X \times Y$ は第一分離公理を満足する．

6.　商空間 $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}/\sim_\alpha$ は $\boldsymbol{Z}$ の作用 $\varphi_n(z)=\alpha^n z$ による軌道空間である．同相写像 $\boldsymbol{C} \setminus \{0\} \to S^1 \times \boldsymbol{R}$, $z \mapsto \left(\frac{z}{|z|}, \log|z|\right)$ によって $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ を $S^1 \times \boldsymbol{R}$ と同一視すれば，α を極形式で $re^{\theta\sqrt{-1}}$ と表すとき，作用は $(w,x) \mapsto (e^{n\theta\sqrt{-1}}w, x+n\log r)$ で与えられる．さて $r=|\alpha|$ の値によって場合を分ける．$r>1$ のとき．二点 $(w,x), (w',x') \in S^1 \times \boldsymbol{R}$ が異なる軌道上にあれば，$n \to \pm\infty$ のとき $x'+n\log r \to \pm\infty$ であるから (w,x) の近くには (w',x') の軌道上の点は有限個しかない．そのうち (w,x) に一番近いものと (w,x) との距離を ε とおくと，作用 $(w,x) \mapsto (e^{n\theta\sqrt{-1}}w, x+n\log r)$ が等長写像であることから，(w,x) と (w',x') の $\varepsilon/3$-近傍 $U((w,x);\varepsilon/3)$, $U((w',x');\varepsilon/3)$ は同じ軌道上の点を含まない．したがって商空間 $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}/\sim_\alpha$ はハウスドルフ性をもつ．$r<1$ のときは同値関係 $\sim_\alpha$ が α^{-1} に対する $\sim_{\alpha^{-1}}$ と同じものであるから，やはり商空間はハウスドルフ性をもつ．$r=1$ のときは θ の値によって場合を分ける．$\theta/2\pi$ が有理数のとき，適当な p に対して $\alpha^p=1$ となるから各同値類は有限個の点のみを含む．したがって商空間はハウスドルフである．逆に $\theta/2\pi$ が無理数のとき，各点 $(w,x) \in S^1 \times \{x\}$ の軌道は $S^1 \times \{x\}$ で稠密である (1.3 節例題, p.52)．各軌道が可算

集合で S^1 が連続濃度をもつことから, 商空間の部分集合 $S^1\times\{x\}/\sim_\alpha$ は二点以上を含むが, その位相は密着位相であるからハウスドルフではない. したがって商空間自体 $\boldsymbol{C}\setminus\{0\}/\sim_\alpha$ もハウスドルフではない. 以上より商空間がハウスドルフ性をもつのは $|\alpha|\neq 1$ あるいは α が 1 のべき根であるとき, そのときに限る.

7. $\boldsymbol{R}$ はアーベル群であるから任意の部分群 A は正規部分群であり, $\boldsymbol{R}/A$ は常に位相群の構造をもつ. A が自明な部分群 $\{0\}$ の場合, $\boldsymbol{R}/A\approx\boldsymbol{R}$ はハウスドルフである. $A\neq\{0\}$ のとき, A に正の最小元が存在するか否かで場合を分ける. 最小元 $a\in A$ が存在する場合, A はこの a によって群として生成される. 実際もし a の整数倍とならない $x\in A$, $x>0$ が存在すれば, $na<x$ を満たす最大の自然数 n をとると $0<x-na<a$ が A に属し, a が正の最小元であることに反する. したがって $A=a\boldsymbol{Z}$ であり, このとき位相群としての同型写像 $\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $x\mapsto ax$ が位相同型写像 $\bar{\varphi}:\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\approx S^1\to\boldsymbol{R}/A$ を導くから, 商位相群 $\boldsymbol{R}/A$ はハウスドルフである. A が正の最小元をもたないとき. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $0<a<\varepsilon$ を満たす A の元 a が存在する. そうすると各 $x\in\boldsymbol{R}$ に対して $na\leq x<(n+1)a$ なる整数 n が存在するから, この場合 A は $\boldsymbol{R}$ で稠密である. 同じ理由ですべての剰余類 $x+A$ は $\boldsymbol{R}$ で稠密であり, したがって A の剰余類の和として表される $\boldsymbol{R}$ の開集合は空集合と全体集合のみであるから, 商空間 $\boldsymbol{R}/A$ は密着位相をもつ. よってこの場合 $\boldsymbol{R}/A$ がハウスドルフとなるのは $A=\boldsymbol{R}$ の場合に限る. 以上をあわせて商位相群 $\boldsymbol{R}/A$ がハウスドルフ性をもつのは, $A=\{0\}$, $A=a\boldsymbol{Z}$, $A=\boldsymbol{R}$ の場合に限る (参照 1.3節例題, p.52).

8. X, Y を $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満たす空間とする. X の部分空間 A から, 一点 $x\in A$ とそれを含まない相対閉集合 $F\subset A$ をとる. F に対して X の閉集合 F_X であって $F=F_X\cap A$ を満たすものが存在する. この F_X は条件より x を含まないから, 分離公理 $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ より, 連続関数 $f:X\to[0,1]$ であって $f(x)=0$, $f(y)=1$, $y\in F_X$ を満たすものが存在する. この関数を A に制限すれば A が $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満たすことがわかる. 次に積空間 $X\times Y$ において, 点 $(x,y)\in X\times Y$ およびそれを含まない閉集合 $F\subset X\times Y$ を考える. F の補集合 F^c は (x,y) を含む開集合であるから, X の開部分集合 U, y の開部分集合 V であって $(x,y)\in U\times V\subset F^c$ を満たすものが存在する. X, Y が $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満たすことから, 点 x, y とこの U, V の補集合 U^c, V^c に対して 連続関数 $f:X\to[0,1]$, $g:Y\to[0,1]$ であって, $f(x)=0$, $f(x')=1$, $x'\notin U$, $g(y)=0$, $f(y')=1$, $y'\notin V$ なるものが存在する. この f, g を用いて積空間 $X\times Y$ 上の連続関数を $(x,y)\mapsto\max\{f(x),g(y)\}$ で定義すれば, $X\times Y$ が $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ を満足することがわかる.

第4章

1. (1) U ただ一つからなる A の開被覆 $\{U\}$ に対するルベーグ数 $\varepsilon>0$ をとれば,

$U(A;\varepsilon)\subset U$ が成り立つ.

(2) $A\cap B\neq\emptyset$ ならば常に $\bar{d}(A,B)=0$ である. 逆に $A\cap B=\emptyset$ ならば $A\subset B^c$ であるが, A, B がコンパクトならば B^c は開集合であるから, (1) が使えて, 適当な $\varepsilon>0$ に対して $U(A;\varepsilon)\subset B^c$. したがって $\bar{d}(A,B)\geq\varepsilon>0$ である.

2. 正の実数 a が与えられたとき, 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の, 周の長さが a であるような四角形 $ABCD$ のうち, 面積最大のものを求める問題である. そのうちの一つの頂点 A は固定されているとしてよい. このとき四角形は, 条件 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=a$ を満たす三組 (B,C,D), $B,C,D\in\boldsymbol{R}^2$ と同一視されるから, その全体は $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$ の有界閉集合であり, したがってコンパクト. 面積は (B,C,D) に関して連続であるから, 最大値を与える四角形は存在する. さて A,C が与えられたとき, $\overline{CD}+\overline{DA}$ が一定という条件下で $\triangle ACD$ の面積を最大とする D は, A と C から等距離にある点である. したがって面積の最大値を与える四角形においては $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a/4$ が成立している. このような四角形, すなわち菱形の面積は, その内角の一つを θ とするとき $2\frac{1}{2}(a/4)^2\sin\theta$ で与えられる. この関数は $\theta=\pi/2$ のとき, すなわち四角形が正方形のときに値が最大となる.

3. $\boldsymbol{R}^n$ の互いに直交する単位ベクトルの k 組の全体を $\mathcal{F}_k$ とおく. $u=(u_i), v=(v_i)\in\boldsymbol{R}^n$ の内積 $\sum u_iv_i$ を $u\cdot v$ で表せば $\mathcal{F}_k=\{(v_1,\cdots,v_k);\ v_i\cdot v_j=\delta_{ij}\}$ である. 任意の k 次元部分空間に対して正規直交基底をとることができるから, $\mathcal{F}_k$ の同値関係を $(v_1,\cdots,v_k)$ と $(v'_1,\cdots,v'_k)$ の張る部分空間が一致することで定義すれば, 商集合 $\mathcal{F}_k/\sim$ は $\boldsymbol{R}^n$ の k 次元部分空間の全体と等しい. この集合に商空間としての位相を入れた空間を $G_{n,k}$ で表し, **グラスマン多様体**と呼ぶ. $G_{n,k}$ が多様体の構造をもつことについては [16] を参照されたい. さて $\mathcal{F}_k$ は $S^n\times\cdots\times S^n$ の閉部分集合であるからコンパクトで, したがってグラスマン多様体 $G_{n,k}$ もコンパクト. また一点 $p\in\boldsymbol{R}^n$ と H との距離は, H の正規直交基底 $v_1,\cdots,v_k$ を用いて $\bar{d}(p,H)=\|p-\sum_i(p\cdot v_i)v_i\|$ と表現されるから, 商位相に関して連続. これより距離の和 $f(H)=\sum_\ell\bar{d}(p_\ell,H)$ に対して, その最小値を与える k 次元部分空間 H_0 が存在する.

4. $\varphi(x,y,z)=\left(x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}, y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}, z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ によって写像 $\varphi: F\to S^2$ を定義する. この φ は連続であり, また任意の $(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ に対して $(\lambda x_0,\lambda y_0,\lambda z_0)$ が F 上にあるような λ が符号を除いて唯一つ定まることから, 全単射でもある. 一方 φ の定義域の F は $\boldsymbol{R}^3$ の有界閉集合であるからコンパクトで, 値域の S^2 はハウスドルフであるから, φ は同相写像となる.

グラスマン: Hermann Günther Grassmann, 1809-1877.

5. X をコンパクト空間, $f:X\to \boldsymbol{R}$ を上半連続関数とする. f の値の上限を s とするとき, $s<\infty$ であること, また $f(x_0)=s$ を満たす $x_0\in X$ が存在することをいえばよい. 上限 s に対して $s_n=s-1/n$ とおく. ただし $s=\infty$ のときには $s_n=n$ とする. $A_n=\{x;\ f(x)\ge s_n\}$ によって定義される閉部分集合の単調減少列は, s が f の値の上限であることから各 A_n が空ではなく, したがって有限交叉性をもつ. X はコンパクトであったからすべての共通部分 $\bigcap A_n$ は空ではない. $\bigcap A_n$ に属する点 x_0 をとれば $f(x_0)=s$ が成り立つ. これより特に s は有限であり, さらに x_0 が最大値 s を与える.

6. X はコンパクトであるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対して有限個の ε-開球 $U(x_i;\varepsilon)$ で X を覆うことができる. B_i で対応する ε-閉球 $B(x_i;\varepsilon)$ を表せば, その全体も X の有限被覆をなすが, 必要ならば同じ集合を 2 度以上数えることとして B_i の個数 n_1 は 2 のべき $n_1=2^{k_1}$ であるとしてよい. そうすると B_i の全体 $\{B_i\}$ と 0, 1 の長さ k_1 の列の全体 $\{0,1\}^{k_1}$ の間に全単射が存在する. 同様にして各 B_i を有限個の B_i における $\varepsilon/2$-閉球 $B_{ij}\subset B_i$ で覆うことができるが, このときも必要ならば同じ集合を数えて, その個数 n_2 が i によらず一定で, しかも 2 のべき 2^{k_2} であるとしてよい. そうすると各 i を固定したとき, B_{ij} の全体 $\{B_{ij}\}_{j=1,\cdots,2^{k_2}}$ と $\{0,1\}^{k_2}$ の間に全単射が存在する. これを繰り返して X の閉集合族の列 $\{B_i\}, \{B_{ij}\}, \cdots$ を構成する. そうすると $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ の元, すなわち 0, 1 の無限列 $\alpha_1\alpha_2\cdots$ に対して

$$\overbrace{\alpha_1\cdots\alpha_{k_1}}^{k_1}\overbrace{\alpha_{k_1+1}\cdots\alpha_{k_1+k_2}}^{k_2}\alpha_{k_1+k_2+1}\cdots$$

とこれを分割することによって, 対応する閉集合の減少列 $B_i\supset B_{ij}\supset\cdots$ が得られる. この列は有限交叉性をもつから, すべての共通部分 $\bigcap B_{ij\cdots k}$ は空集合ではない. 一方で添え字が一つ増えるたびに直径が半分になるから $\bigcap B_{ij\cdots k}$ は唯一点よりなる. したがって無限列 $\alpha_1\alpha_2\cdots$ に, 対応する閉集合の減少列の共通部分に含まれる点を対応させることによって写像 $\varphi:\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}\to X$ が得られる. 各 $p\in X$ に対して, これを含む減少列 $B_i, B_{ij}, \cdots$ が存在することから φ は全射である. また二つの無限列 $\alpha_1\alpha_2\cdots, \beta_1\beta_2\cdots$ が近い, すなわち十分大きい N まで数字が一致するならば, それらの φ による像は同じ $B_{ij\cdots N}$ に含まれるから距離が近い. したがって φ は連続である. カントール集合は 0, 1 の無限列の全体 $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}$ と同相であったから (例 2.13, p.79), 求める写像が得られた.

7. 自然数 Nに対して $\Sigma_{\varphi,N}=\{x;\ \varphi(x_{i+1})=x_i, -N\le i\le N\}$ とおけば, これは空でない閉部分集合であり, N に関して単調減少列をなすから有限交叉性をもつ. X がコンパクトであるときにはその直積空間 $X^{\boldsymbol{Z}}$ もコンパクトであるから, $\Sigma_\varphi=\bigcap_N \Sigma_{\varphi,N}$

は空集合ではない．また f が全射である場合には，任意の $p\in X$ に対して $\Sigma_{\varphi,N,p}=\{x\in\Sigma_{\varphi,N};\ x_0=p\}$ は空集合ではない．この $\Sigma_{\varphi,N,p}$ に対して同じ議論を繰り返せば，$x_0=p$ を満たす点 $x\in\Sigma_\varphi$ の存在がわかる．したがって $\mathrm{pr}_0:\Sigma_\varphi\to X$ は全射である．

8.　X が第二可算公理を満たせば，高々可算な開集合の基 $\mathfrak{O}^*=\{O_n\}$ が存在する．X の任意の開被覆 $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}$ に対し，その各元 V_λ は O_n の適当な和集合 $\bigcup O_{n'}$ として表される．この表記に現われる $O_{n'}$ の全体を改めて $\mathfrak{O}'$ と書けば，これは $\mathfrak{O}^*$ の部分集合であるから高々可算で，しかもその和は全体空間 X と一致する．各 $O_{n'}\in\mathfrak{O}'$ に対して，これを含む $\mathfrak{V}$ の元を $V_{n'}$ と書けば $\bigcup_{n'}V_{n'}\supset\bigcup_{n'}O_{n'}=X$ であり，しかも $\{V_{n'}\}$ は高々可算集合である．すなわち $\mathfrak{V}$ は高々可算な部分被覆をもつ．逆に X がリンデレーフ空間であったとしよう．自然数 n に対して $1/n$-開球全体は X の開被覆をなすから，仮定よりその可算部分被覆が存在する．これを $\{U(x_{nk};1/n)\}_{k=1,2,\cdots}$ とおき，その中心の全体の $n=1,2,\cdots$ に関する和集合 $D=\{x_{nk};\ n,k=1,2,\cdots\}$ を考えれば，これは高々可算なる部分集合で，しかも構成より X で稠密となる．したがって X は可分であるが，距離空間においては可分性から第二可算公理が導かれるのであった (定理 2.8, p.69).

9.　X の点列 $\{x_n\}$ が収束部分列をもたないとして矛盾を導く．$f_n(x)=\max\{0,n-n^2d(x,x_n)\}$ とおくと，f_n は $x=x_n$ で値 n を，x_n の $1/n$-近傍の外で値 0 をとる連続関数である．もし点列 $\{x_n\}$ が集積点をもたなければ，任意の $x\in X$ に対して $\varepsilon>0$ が存在して，x の ε-近傍は有限個の x_n のみを含む．したがって x の $\varepsilon/2$-近傍と台 $\mathrm{supp}(f_n)$ が共通部分をもつような n は有限個である．よって和 $f(x)=\sum f_n(x)$ は各 $x\in X$ に対して意味をもち，しかも連続．一方で $f(x_n)\geq f_n(x_n)=n$ より $f(x)$ は上に有界ではない．これは任意の連続関数が最大値をとるという仮定に反する．

(別解)　距離化定理 (p.119) の証明から逆に，第二可算公理を満たす距離空間はヒルベルト立方体 $[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ へ部分集合として埋め込むことができることがわかる．各点 $p\in[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ に対して，距離 $d(x,p)$ は 部分集合 $X\subset[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ 上の連続関数であるから，仮定より最小値を与える $x_0\in X$ が存在する．これより X のすべての触点が X に属するから，X は $[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ の閉部分集合，したがってコンパクトである．

10. (1)　部分集合 A, B が $d_H(A,B)<\varepsilon$ を満たせば $B\subset U(A;\varepsilon)$ であるから，$\mathrm{diam}B\leq\mathrm{diam}A+2\varepsilon$．同様に $\mathrm{diam}A\leq\mathrm{diam}B+2\varepsilon$ も成り立つから 関数 $\mathrm{diam}:\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$ は d_H に関して連続である．

(2)　$n=1$ として $K_m=\{0,1/m,\cdots,(m-1)/m,1\}$, $K_\infty=[0,1]$ を考える．このとき $d_H(K_m,K_\infty)=1/m$ よりハウスドルフ距離の下で $K_m\to K_\infty$．一方で K_m の体積は，この場合は長さであるが，$\mathrm{vol}(K_m)=0$ を満たすが，極限においては $\mathrm{vol}(K_\infty)=1$．したがって関数 $\mathrm{vol}:\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$ は連続ではない．

注: 任意の $K\in\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)$ に対して体積 $\mathrm{vol}(K)$ を定義するにはルベーグ積分が必要である.

(3) $A\subset\boldsymbol{R}^n$ をコンパクト部分集合とする. コンパクト集合上の連続関数が一様連続であることの証明と同様にして, 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を選んで, $\|x-a\|<\delta$ かつ $a\in A$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つようにできる. コンパクト部分集合 $B\subset\boldsymbol{R}^n$ が $d_H(A,B)<\delta$ を満たすと仮定しよう. このとき任意の $b\in B$ に対し, これを δ-近傍に含む $a\in A$ が存在するから $f(b)<f(a)+\varepsilon\le m_f(A)+\varepsilon$, したがって $m_f(B)\le m_f(A)+\varepsilon$. 一方で最大値 $m_f(A)$を与える $a_0\in A$ の δ-近傍に B の元が存在するから $m_f(B)>m_f(A)-\varepsilon$. すなわち $m_f:\mathcal{K}(\boldsymbol{R}^n)\to\boldsymbol{R}$ は連続である.

11. 一様ノルムによる位相のもとで証明する. 他のノルムの場合も同様である. 正の数 ε に対して $f_n(t)=\varepsilon\cos 2^n\pi t$ で定義される関数 f_n を考える. $\|f_n\|=\varepsilon$ より $\{f_n\}$ は 0 の ε-閉球上の関数列である. 一方で $n<m$ のとき $t=1/2^n$ に対して $f_n(t)=-\varepsilon$, $f_m(t)=\varepsilon$ であるから $\|f_n-f_m\|=2\varepsilon$. よって $\{f_n\}$ は収束部分列を含まない. 任意の $\varepsilon>0$ に対して 0 の ε-閉球が点列コンパクトでないから, $C[0,1]$ は局所コンパクトではない.

12. 課された条件は相似によって不変であるから, 頂点 A, B を固定して考える. 正の実数 α を決めたとき, 条件 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\alpha$ を満たす C の全体は B を中心とする半径 $\dfrac{\overline{AB}}{\alpha}$ の円周をなす. これは平面上の疎な閉集合であるから, 有理数全体が可算であることより, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ が無理数となるような C の全体は第二類の集合である. $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$ が一定という条件は A を中心とする円で, また $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$ が一定という条件はアポロニウスの円で与えられる. 角に関しても $\angle A$, $\angle B$ が一定という条件は, それぞれ A, B を端点とする二つの半直線の和集合として, また $\angle C$ が一定という条件は A, B を通る二つの円弧の和集合として与えられる. いずれも疎な閉集合であるから, これらのうちのどれかが有理数であるような C の全体は第一類の集合である. 平面は局所コンパクトであったから, 第一類の集合が平面全体と一致することはない. よって条件を満たす三角形が存在する.

13. $U_\lambda=\{x;\ g_\lambda(x)>0\}$ とおけば, その全体は X の開被覆をなすから, X に対する仮定より, $\{U_\lambda\}$ に従属する 1 の分割 $\{\rho_\lambda\}$ が存在する. この ρ_λ を用いて $g(x)=\dfrac{1}{2}\sum_\lambda \rho_\lambda(x)g_\lambda(x)$ と定義すれば, この g が求める条件を満たす.

アポロニウス: Apollonius = Apollonios of Perga, 262-200?B.C.

第5章

1. 共通部分 $A_\infty=\bigcap_n A_n$ が連結でないと仮定しよう．このとき空でない相対閉部分集合への直和分解 $A_\infty=F\sqcup F'$ が存在するが，F, F' はコンパクト集合の相対閉集合であるからコンパクトで，したがって X の閉集合でもある．X が正規空間であることから (定理 4.13, p.142)，$F\subset U$, $F'\subset U'$ なる開集合 U, U' で $U\cap U'=\emptyset$ を満たすものをとることができる．ここで $K=X\setminus(U\cup U')$ は閉集合である．さて A_n は $A_n\cap U\supset F\neq\emptyset$ および $A_n\cap U'\supset F'\neq\emptyset$ を満たすが，仮定より A_n は連結であったから $A_n\cap K\neq\emptyset$. これより閉集合族 $\{A_n\cap K\}_n$ は有限交叉性をもつから，X のコンパクト性によって $\bigcap(A_n\cap K)=A_\infty\cap K\neq\emptyset$. これは $A_\infty\subset U\cup U'$ に反する．したがって A_∞ は連結である．

2. (1) 部分集合 $\overline{\{\gamma(t);t\geq T\}}$ は連続写像による区間の像 $\{\gamma(t);t\geq T\}$ の閉包であるから連結．よって問 1 の結果がそのまま使えて $\omega(\gamma)$ は連結となる．

(2) 領域 $\boldsymbol{R}\times(-1,1)$ は平面 $\boldsymbol{R}^2$ と同相であるから，この上で反例を構成すればよい．$\boldsymbol{R}^2$ 上の曲線を $\gamma(t)=\left(\dfrac{t}{1+t}\cos t, \dfrac{t}{1+t}\sin t\right)$, $0\leq t<\infty$ で定義すれば，その ω-極限集合は単位円周 $\{(x,y);\ x^2+y^2\}$ で与えられるが，γ を $\boldsymbol{R}\times(-1,1)$ 上の曲線と見たときの ω-極限集合は，単位円周と $\boldsymbol{R}\times(-1,1)$ との共通部分で連結ではない (図 B.8).

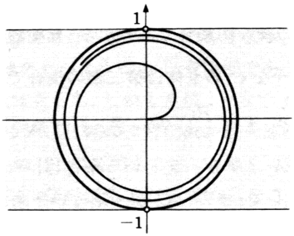


図 B.8

3. X を連結な正規空間，$p,q\in X$ を異なる二点とする．ウリゾーンの補題 (p.116) より，共通部分のない閉集合 $\{p\}$, $\{q\}$ に対して，これらを分離する連続関数 $f:X\to[0,1]$, $f(p)=0$, $f(q)=1$ が存在するが，X は連結であったから，関数 f の像 $f(X)$ は閉区間 $[0,1]$ と一致する．したがって X は連続以上の濃度をもつ．

4. X および Y が弧状連結であるとする．任意の $(x,y),(x',y')\in X\times Y$ に対し，x と x' を結ぶ道を $\gamma_X:[0,1]\to X$, y と y' を結ぶ道を $\gamma_Y:[0,1]\to Y$ の積として与えられる写像 $\gamma:[0,1]\to X\times Y$, $\gamma(t)=(\gamma_X(t),\gamma_Y(t))$ は (x,y) と (x',y') を結ぶ．逆に $X\times Y$ が弧状連結であれば，任意の $x,x'\in X$, $y_0\in Y$ に対し，(x,y_0) と (x',y_0) を結

ぶ道 $\gamma:[0,1]\to X\times Y$ が存在するから, この γ と X への射影 $\mathrm{pr}_X: X\times Y\to X$ との合成 $\mathrm{pr}_X\circ\gamma:[0,1]\to X$ は x と x' とを結ぶ道となる.

5. 簡単のため $0\in A$ と仮定する. A が有界ならば $A\subset D_r=\{x;\ \|x\|\le r\}$ なる $r>0$ が存在する. A の凸性より, $p\notin A$ ならば半直線 $\{\lambda p;\ \lambda\ge 1\}$ は補集合 $\boldsymbol{R}^n\setminus A$ に含まれるから, 任意の $p\in\boldsymbol{R}^n\setminus A$ と $S_r=\partial D_r=\{x;\ \|x\|=r\}$ 上の点を $\boldsymbol{R}^n\setminus A$ の道で結ぶことができる. 一方で球面 $S_r\approx S^{n-1}$ $(n\ge 2)$ は弧状連結であったから $\boldsymbol{R}^n\setminus A$ が弧状連結であることが従う. A が有界でないときには, これは必ずしも正しくない. 例えば $\boldsymbol{R}\times\{0\}\subset\boldsymbol{R}^2$ は凸部分集合であるが, その補集合は連結ではない.

6. (1) 異なる二点 $p,q\in\boldsymbol{R}^n\setminus\Lambda$ に対して, これらを通る円の全体を $\{C_\mu\}_\mu$ と書くと, これは非可算無限集合である. 一方で円はその上の三点を与えれば決定されるから, 可算集合 Λ の点を含む C_μ は高々可算個. したがって $C_\mu\subset\boldsymbol{R}^n\setminus\Lambda$ なる円 C_μ が存在し, Λ の補集合 $\boldsymbol{R}^n\setminus\Lambda$ が弧状連結であることが従う.

(2) M の各点 p は n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ と同相な近傍 U_p をもつ. このような近傍の全体を $\mathfrak{U}$ とし, その同値関係 $U\sim U'$ を, $U=U_0,U_1,\cdots,U_k=U'$ なる列 $U_i\in\mathfrak{U}$ で, $U_i\cap U_{i+1}\neq\emptyset$ を満たすものが存在することで定義すれば, 一つの同値類に属する U_λ 全体の和集合 $\bigcup U_\lambda$ は連結である (定理 5.7, p.169). 一方で全空間 M は, このような和集合の直和として表されるから, M が連結ならば同値類は唯一つである. このとき $\Lambda\subset M$ が高々可算な集合であれば, (1) より $U_p\setminus\Lambda$ は連結で, $U_p\cap U_q\neq\emptyset$ ならば $(U_p\setminus\Lambda)\cap(U_q\setminus\Lambda)\neq\emptyset$ でもあるから, 和集合 $\bigcup(U_p\setminus\Lambda)=M\setminus\Lambda$ が連結であることが従う.

7. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の向きのついた直線の全体を $\mathfrak{L}$ で表す. 直線 $\ell\in\mathfrak{L}$ に対して, その方向を $v(\ell)\in S^1$, 原点 0 と ℓ との距離を $d(\ell)=\bar{d}(0,\ell)$ で表す. ただし $d(\ell)$ には符号をつけて, 原点 0 が直線の左側にあるときは $d(\ell)>0$, 右側にあるときは $d(\ell)<0$ とする. そうすると対応 $\mathfrak{L}\to S^1\times\boldsymbol{R}$, $\ell\mapsto(v(\ell),d(\ell))$ は全単射となるから, これによって $\mathfrak{L}$ に位相を入れる. さて各 $v\in S^1$ を決めたとき, $v(\ell)=v$ を満たす直線 $\ell\in\mathfrak{L}$ であって A を面積が半分になるように二つに分けるものはただ一つであるが, 各 v にこの直線 $\ell(v)$ を対応させる写像 $S^1\to\mathfrak{L}$ は連続である (図 B.9). 直線 $v(\ell)$ について右側にある B の部分を B', 左側にある部分を B'' とし, これらの面積の差 $m(B)-m(B')$ を $m(v)$ とおく. これも v に関して連続な関数である. 一つの向き $v_0\in S^1$ に対して $m(v_0)>0$ であったとしよう. このとき逆の向き $-v_0\in S^1$ に対応する直線 $\ell(-v_0)$ は, $\ell(v_0)$ に逆の向きをつけたものであるから $m(-v_0)=-m(v_0)$. したがって中間値の定理より $m(v)=0$ を満たす $v\in S^1$ が存在する. この v に対応する $\ell(v)$ が求める直線である.

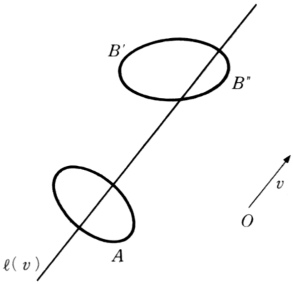


図 B.9

注: 一般に n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の n 個の有界凸領域に対して, これらを同時に, 体積が半分になるように二つに分ける超平面が存在する. その証明にはさらに進んだ位相幾何学的知識が必要である.

8. G を位相群, e を単位元, C をその連結成分とする. まず任意の $g\in G$ に対し, 左移動 $L_g : G\to G$, $L_g(x)=gx$ が同相写像であることから $L_g(C)=gC$ は g の連結成分である. これより $x\in C$ のとき xC は x の連結成分であるから C に一致し, また $e=x^{-1}x\in x^{-1}C$ より $x^{-1}C$ も C に一致する. したがって $x,y\in C$ に対して $x^{-1}yC=x^{-1}C=C$ より $x^{-1}y\in C$. すなわち C は G の部分群である. また任意の $g\in G$ に対して $Ad_g : G\to G$, $Ad_g(x)=g^{-1}xg$ は同相写像で $Ad_g(e)=e$ を満たすから $Ad_g(C)=C$. すなわち C は G の正規部分群である.

9. (1) 任意の $\varphi : S^1 \to \boldsymbol{R}^3\setminus\{p_i\}$ に対し, $\boldsymbol{R}^3$ が単連結であることから, その拡張 $\bar{\varphi} : D^2\to\boldsymbol{R}^3$ が存在する. ここで定義域の D^2 を三角形 $\triangle$ と同一視し, その分割を細かくとって, 各小三角形上で $\bar{\varphi}$ をアファイン写像 $\bar{\psi}$ で取り替える. このときさらに各頂点の像を少し動かして, どの三点を通る平面も p_i を含まないとしてよい. こうして得られた写像 $\bar{\varphi}$ は, その境界 $\partial\triangle$ への制限 $\psi : S^1\to\boldsymbol{R}^3\setminus\{p_i\}$ の零ホモトピーを与えるが, ψ は φ の近似であるから, 命題 5.11 (p.180) によって φ とホモトピックである. したがってもとの φ も $\boldsymbol{R}^3\setminus\{p_i\}$ で零ホモトピックである.

(2) 除く直線のうちの一本を ℓ とし, この ℓ と直交する平面 H で, どの ℓ_i をもその上には含まないものをとる. ℓ と H との交点を p とするとき, pを中心とする H 上の適当な半径の円 C_r は $\boldsymbol{R}^3\setminus\bigcup\ell_i$ に含まれるが,これを S^1 からの写像と見たときには $\boldsymbol{R}^3\setminus\ell$, したがって $\boldsymbol{R}^3\setminus\bigcup\ell_i$ で零ホモトピックではない.

第6章

1. r が p で割り切れるならば $d_p(r^n,0)\leq a^{-n}$ より $\{r^n\}$ は 0 に収束する. したがってこのときは $\{r^n\}$ はコーシー列である. 逆に $\{r^n\}$ がコーシー列であれば, 任意の k

に対して十分大きい N をとれば $d_p(r^{N+1}, r^N) < a^{-k}$. よって $r^{N+1} - r^N = r^N(r-1)$ は p^k で割り切れるけれども, $r-1$ の因数分解に現れる p の数は有限であるから, r^N, したがって r が p で割り切れる. 以上より $\{r^n\}$ がコーシー列である必要十分条件は r が p で割り切れることである.

2. $\sum a_n\alpha^n$ が収束するときは $a_n \to 0$ となるから, 逆を示す. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\alpha^k$ とおき, ガウス平面 $\boldsymbol{C}$ 上の三点 s_n, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}\alpha^{n+1}$, $s_n - a_{n+1}\alpha^n$ を通る円で囲まれる閉円板を B_n とする. B_n は s_n および s_{n+1} を含む. また $a_{n+1} \geq a_{n+2}$ より B_{n+1} は B_n の部分集合であるから, B_n は s_{n+2} をも含み, 同様にすべての s_k, $k \geq n$ を含む (図 B.10). $a_n \to 0$ ならば B_n の半径も 0 に収束するから, このとき $\{s_k\}_{k=1,2,\cdots}$ はコーシー列であり, $\boldsymbol{C}$ の完備性より収束する. ただし $\alpha = -1$ のときには, B_n の代わりに s_n, s_{n+1} を端点とする実数空間上の閉区間 I_n を用いる.

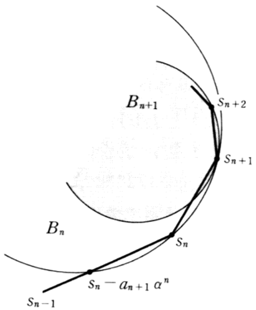


図 B.10

3. (1) $A = (a_x, a_y)$, $B = (b_x, b_y)$, $C = (c_x, c_y)$ とおくとき, $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2}\left|(b_x - a_x)(c_y - a_y) - (b_y - a_y)(c_x - a_x)\right|$ で与えられる. この値が 1 のとき A, B, C が同一直線上にあることはないから, 面積が 1 の三角形の全体は $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2$ の部分集合とみても閉集合で, したがって完備である.

(2) この部分集合は $X = \left\{(A, B, C) \in \mathcal{T};\ \max\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}\} = 1\right\}$ で与えられるから, その $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2$ での閉包は“つぶれた”三角形を含む. したがって X は完備ではなく, その完備化は X に同一直線上の三点 (A, B, C) で $\max\{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}\} = 1$ を満たすものの全体を加えた空間となる.

4. (1) $\{x_n\}$ を X の収束点列, x_∞ をその極限とするとき, $x_1, x_\infty, x_2, x_\infty, \cdots$ によっ

て与えられる点列を考える．この点列も同じ極限 x_∞ に収束するからコーシー列であり，よって条件より φ によるその像 $\varphi(x_1), \varphi(x_\infty), \varphi(x_2), \varphi(x_\infty), \cdots$ もコーシー列であるが，これは点列 $\{\varphi(x_n)\}$ が $\varphi(x_\infty)$ に収束することを導く．したがって φ は連続である．

(2) 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間 $X=\{(n,0);\, n\in\boldsymbol{N}\}\cup\{(n,e^{-n});\, n\in\boldsymbol{N}\}$, $Y=\{(n,0);\, n\in\boldsymbol{N}\}\cup\{(n,1);\, n\in\boldsymbol{N}\}$ と写像 $\varphi: X\to Y$, $\varphi(n,0)=(n,0)$, $\varphi(n,e^{-n})=(n,1)$ を考える．X は $\boldsymbol{R}^2$ の閉部分集合であるから，任意のコーシー列 $\{x_n\}$ は収束するが，一方で X は離散位相をもつから，このとき適当な番号以上は x_n は一定となる．したがって φ による $\{x_n\}$ の像も収束し，特にコーシー列である．しかし $\varphi(n,0)=(n,0)$ と $\varphi(n,e^{-n})=(n,1)$ の距離が常に 1 であることから φ は一様連続ではない．

5. カントール集合 $C\subset[0,1]$ は，長さ $1/3^n$ の 2^n 個の閉区間の和集合 C_n の共通部分として与えられるから，これを利用する．まず $f_1:[0,1]\to[0,1]$ を C_1 でだけ値が増加する関数，具体的には $f_1(t)=3t/2$ $(0\le t\le 1/3)$, $f_1(t)=1/2$ $(1/3\le t\le 2/3)$, $f_1(t)=(3t-1)/2$ $(2/3\le t\le 1)$ とする．次に f_1 を $[0,1/3]$, $[2/3,1]$ 上で改変して C_2 でだけ値が増加する関数 f_2 を作る．具体的には $[0,1/3]$ 上で $f_2(t)=3^2t/2^2$ $(0\le t\le 1/3^2)$, $f_2(t)=1/2^2$ $(1/3^2\le t\le 2/3^2)$, $f_2(t)=(3^2t-1)/2^2$ $(2/3^2\le t\le 1/3)$ とし，$[2/3,1]$ 上でも同様に定める．このとき $\|f_1-f_2\|<1/4$ が成り立つ．これを繰り返して関数列 f_n を構成すれば，$\|f_n-f_{n+1}\|<1/2^{n+1}$ より f_n は $[0,1]$ 上一様収束する．各 f_n が単調増加でかつ $[0,1]\backslash C_n$ の各連結成分で一定値をとることから，極限関数 f は単調増加で，かつカントール集合 C の補集合上 $f'(t)=0$ を満たす (図 B.11).

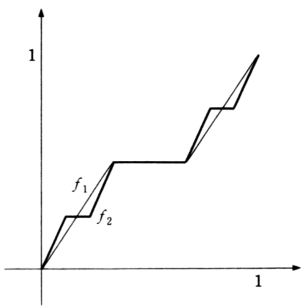


図 B.11

6. ε を正の数とする．各 $x\in X$ に対して自然数 N_x を $f_{N_x}(x)>f(x)-\varepsilon$ が成り立つようにとり，さらに x の近傍 U_x を，任意の $x'\in U_x$ が $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ お

よび $|f_{N_x}(x')-f_{N_x}(x)|<\varepsilon$ を満たすようにとる．このとき各 $x'\in U_x$ に対して $f_{N_x}(x')>f_{N_x}(x)-\varepsilon>f(x)-2\varepsilon>f(x')-3\varepsilon$ が成立する．このような U_x の全体は X の開被覆をなすから，有限部分被覆を $\{U_{x_i}\}$，対応する N_{x_i} のうち最大のものを改めて N とおく．そうすると $n\geq N$ のとき，任意の x に対してこれを含む U_{x_i} を考えれば $f(x)-3\varepsilon<f_{N_{x_i}}(x)\leq f_n(x)\leq f(x)$ が成り立つ．これは $\{f_n\}$ が X 上 f に一様収束することを示している．

7. (1) $\boldsymbol{R}^n$ 上の C^r級関数 f に対して $\|f\|_{(r)}=\sum_{|\alpha|\leq r}\sup_{x\in K}|D^\alpha f(x)|$ とおく (参照例 2.4, p.66)．ここで $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_i\geq 0$ に対して $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $D^\alpha f=\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}f$ である．この $\|\ \|_{(r)}$ に対して $a_m>0$ を，$a_m\|f\|_{(m)}\leq\dfrac{1}{m^2}$ が成立するようにとる．そうすると $r\leq m$ のとき $\|\ \|_{(r)}\leq\|\ \|_{(m)}$ であることから任意の r に対して $\sum a_mf_m$ は $\|\ \|_{(r)}$ のもとで収束する．したがって極限 $\sum a_mf_m$ は C^r 級であるが，r は任意であったから $\sum a_mf_m$ はなめらかな関数である．

(2) 最初に U が有界である場合を扱う．有理点を中心とする開球の全体が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合系の基をなすことから，U を開球の可算和 $\bigcup_m U(x_m;r_m)$ として表すことができる．6.2 節例題 (p.216) の関数 ρ_n を用いて $f_m(x)=\rho_n\left(\dfrac{1}{r_m}(x-x_m)\right)$ と定義すると $U(x_m;r_m)=\{x;\ f_m(x)>0\}$ が成り立つ．ここで関数列 $\{f_m\}$ に対して，和 $\sum a_mf_m$ がコンパクト集合 $\overline{U}$ 上でなめらかな関数に収束するように a_m を選べば，極限関数 f について $U=\{x;\ f(x)>0\}$ が成立する．U が有界でない場合には，0 を中心とする N-開球と U との共通部分 $U_N=U\cap U(0;N)$ に対してまずなめらかな関数 f_N を構成し，次に $b_N>0$ を，$B(0,N)$上の C^Nノルムに関して$b_N\|f_N\|_{(N)}\leq\dfrac{1}{N^2}$ が成り立つようにとれば，$\sum b_Nf_N$ が求める関数となる．

8. 点 $p\in\boldsymbol{R}^2$ に対し，$O_p\subset C([0,1],\boldsymbol{R}^2)$ を，その像に p を含まない曲線の全体とする．$\gamma\in O_p$ ならば $\inf_{0\leq t\leq 1}\|\gamma(t)-p\|>0$ であるから，O_p は一様ノルムに関して開集合である．また任意の曲線 γ は，折れ線で近似して，さらに分点を少し動かすことによって，p を通らない折れ線で近似することができる．したがって O_p は稠密である．これより p が有理点 $\boldsymbol{Q}^2$ すべてを動くときの共通部分 $E=\bigcap_{p\in\boldsymbol{Q}^2}O_p$ は第二類の集合である．ここで $\gamma\in E$ ならば，その像 $\gamma[0,1]$ はすべての有理点を含まず，特に内点をもたない．これが示すべきことであった．

参考文献

本書を著すにあたって, 主題である位相空間に関しては

[1] 河田 敬義, 三村 征雄: 現代数学概説 II, 岩波書店, 1965.

[2] John L. Kelley: General Topology, D. van Nostrand company, 1955, 邦訳 児玉 之宏: 位相空間論, 吉岡書店, 1968.

の二冊を全体の構成と証明の参考とした. ここでは扱うことのできなかった, やや専門的な概念については, この二冊あるいは

[3] N. Bourbaki: Eléments de mathématique II, Topologie genérale, Chapitre 1, 2, Hermann, 1965. 邦訳　森　毅, 清水 達雄: 位相 1, 東京図書, 1968.

などを参照されたい. また集合については [1] のほか

[4] 小平 邦彦, 彌永 昌吉: 現代数学概説 I, 岩波書店, 1961.

を用いた.

まえがきでも触れたように, 基礎知識の想定される枠から外れる例も多く述べたので, これに関する参考文献を挙げておく. 初等解析の教科書としては, まず

[5] 高木 貞治: 解析概論, 岩波書店, 1938, 1943, 1961, 1983.

があるが, この本は実数論, 複素関数論についての解説も含んでいる. 線形代数学あるいは群論に関しては本シリーズの

[6] 佐武 一郎: 線形代数, 本講座 2, 共立出版, 1997.

[7] 赤尾 和男: 線形代数と群, 本講座 3, 共立出版.

[8] 中島 匠一: 代数と数論の基礎, 本講座 9, 共立出版.

を参照されたい. 群論については [4] にも記述がある. 複素関数論については [5] および

[9] 高木 貞治: 代数学講義, 共立出版, 1931, 1971.

[10] 吉田 洋一: 函数論, 岩波全書 141, 岩波書店, 1938, 1965.

[11] 小松 玄: 関数論, 本講座 5, 共立出版.

などがある. 通常の教程で, 位相よりも後に学ぶ分野に関して, ルベーグ積分については [1] あるいは

[12] 志賀 徳造: ルベーグ積分から確率論, 本講座 10, 共立出版.

を, 多様体論については

[13] 松本 幸夫: 多様体の基礎, 基礎数学 5, 東京大学出版会, 1988.

[14] 荻上 紘一: 多様体, 本講座 6, 共立出版, 1997.

を, 位相幾何学に関しては

[15] 松本 幸夫: トポロジー入門, 岩波書店, 1985.

[16] 河田 敬義: 位相幾何学, 現代数学演習叢書 2, 岩波書店, 1965.

[17] 小島 定吉: トポロジー入門, 本講座 7, 共立出版.

を挙げておく. [16] には位相に関する解説と問題も含まれている. 以上は現在, 著者の思いつく範囲での参考書であり, もちろん読者はこのリストに縛られる必要はない. いくつかの本を手にとって, その中から自分にあったものを見つけていただきたい.

索　　引

【記号類】

$\in, \ni$ (属する)　219
$\notin$ (属さない)　219
$\emptyset$ (空集合)　220
$\{\cdots\}$ (集合の外延的定義, 族)　220, 226
$\{x; \cdots\}$, $\{x| \cdots\}$ (集合の内包的定義)　220
$\{a_n\}$ (数列, 点列)　10, 242
$\subset, \supset, \subsetneqq$ (包含関係)　220, 221
$\cup, \bigcup$ (和集合)　221, 227
$\sqcup, \bigsqcup$ (直和)　221, 227
$\cap, \bigcap$ (共通部分)　221, 227
$A \setminus B$ (差集合)　222
A^c (補集合)　222
(a, b) (対)　222
　(開区間)　241
$(a, b]$, $[a, b)$ (半開区間)　241
$[a, b]$ (閉区間)　241
$A \times B$ (直積)　29, 76, 222
$\varphi : A \to B$, $A \xrightarrow{\varphi} B$ (写像)　223
$a_n \to a, f(x) \to a$ (収束)　10, 13, 242
$\varphi(a) = b, \varphi : a \mapsto b$ (元の像)　223
$\varphi(A')$ (部分集合の像)　224
$\varphi^{-1}(B'), \varphi^{-1}(b)$ (逆像)　224
$\varphi|_{A'}$ (制限)　225
$\varphi^{-1} : B \to A$ (逆写像)　225
$\varphi \times \varphi'$ (直積写像)　225
$\psi \circ \varphi$ (合成写像)　225
B^A (写像集合)　226
$\prod$ (直積)　77, 227
　(数の積)　237
$\leq$ (順序関係, 大小関係)　228, 236
$\sim$ (同値関係)　230
$X/\sim$ (商)　86, 231
$\sum$ (和, 級数)　237, 245

$\| \ \|$ (ノルム, ユークリッドのノルム, 一様ノルム)　4, 5, 203
$\| \ \|_p$ (p 次ノルム)　5, 6, 249
$\ominus$ (対称差)　23
$\overset{\circ}{A}$, A° (内部)　44, 59
$\overline{A}$ (閉包)　45, 59
$\dot{A}, \partial A$ (境界)　46, 60
A^e (外部)　47, 60
$\approx$ (同相)　63
X/A (部分集合を一点に縮めた空間)　89
X/G (軌道空間)　96
X/φ (写像による等化空間)　91
$Y \cup_\varphi X$ (接着空間)　93
$\Sigma \# \Sigma'$ (連結和)　94

$X \cup \{\infty\}$ (一点コンパクト化)　158

1_A (恒等写像)　225
∞ (無限遠, 無限大)　**93, 156, 158, 240, 241, 242**
a.e. (=almost everywhere, ほとんど至るところ)　247

$B(\cdot;\varepsilon)$ (ε-閉球)　43
$\beta(X)$ (ストーン-チェックのコンパクト化)　161

$\boldsymbol{C}$ (複素数の集合, 複素数空間)　3, 220
$\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ (リーマン球面)　93
$\boldsymbol{C}^n$ (複素 n 次元空間)　5
$C[0,1], C(\cdot)$ (連続関数の全体)　**6, 203**
$C(\cdot,\cdot)$ (連続写像の全体)　**208**
$C^\infty[0,1]$ (なめらかな関数の全体)　66
Cl (閉包)　45, 59

$d(\cdot,\cdot)$ (距離)　2
D^n (閉円板)　27, 129
diam (直径)　124

Fr (境界)　46, 60

$GL(n;\boldsymbol{R})$ (一般線形群)　32

$\iota : A' \hookrightarrow A, \iota : A' \subset A$ (包含写像)　225
id (恒等写像)　225
inf (下限)　80, 230, 240
Int (内部)　44, 59

L^p (p 乗可積分関数の全体)　100, 248, 250
ℓ^p (数列空間)　6, 53
lim (極限)　10, 14, 242
$\liminf, \underline{\lim}$ (下極限)　243
$\limsup, \overline{\lim}$ (上極限)　243

$M(n;\boldsymbol{R})$ ($n \times n$ 行列全体)　32
max (最大)　240
min (最小)　240

$\boldsymbol{N}$ (自然数の集合)　220

$\mathfrak{O}$ (開集合系)　41, 56
$\mathfrak{O}^*$ (開集合の基)　67

$\mathfrak{P}(A)$ (べき集合)　221
pr (射影)　225, 227

$\boldsymbol{Q}$ (有理数の集合)　26, 220

$\boldsymbol{R}$ (実数の集合, 実数空間)　3, 220
$\boldsymbol{R}^n$ (ユークリッド空間)　3
$\boldsymbol{RP}^n$ (射影空間)　88

S^n (球面)　8
sup (上限)　80, 230, 240
supp (台)　151

T^n (トーラス)　31

$U(\cdot;\varepsilon)$ (ε-近傍)　37
$\mathfrak{U}(\cdot), \mathfrak{U}^*(\cdot)$ (近傍系, 基本近傍系)　58, 64

$\boldsymbol{Z}$ (整数の集合)　12, 220

【ア】

アスコリ-アルツェラの定理　**205**
値 (value)　223
アファイン写像 (affine mapping)　16
粗い (位相が—, coarse) 80
アルキメデスの原理　**241**
アレクサンドロフのコンパクト化　158

【イ】

ε-近傍 (ε-neighborhood)　37
位相 (topology)　11, 56, 68, **81, 84**
位相空間 (topological space)　56
位相群 (topological group)　77, 111
位相写像 (topological mapping)　14, 63
位相同型 (same topological type)　14, 63

位相不変 (topologically invariant) 123
1 対 1 (one to one) 225
1 の分割 (partition of unity) 151
一様収束 (uniform convergence) 13, 203
一様同値 (uniformly equivalent) 190
一様ノルム (uniform norm) **6, 203**
一様有界 (uniformly bounded) 205
一様連続 (uniformly continuous) 130
一点コンパクト化 (one point compactification) 158
一点に縮める (部分空間を—) 89
一般線形群 (general linear group) **32, 177**

【ウ〜オ】

ヴィエトリスの分離公理 112
上への写像 (onto mapping) 225
写す (map, carry, assign) 223
埋め込み (embedding) 74
埋め込み定理 (embedding theorem) 118
ウリゾーンの補題 116

n-組 (n-tuple) 222
円環領域 (annulus) 91

ω-極限集合 (ω-limit set) 186

【カ】

開 (open) 40, 56
外延的定義 220
開核 (open kernel) 44, 59
回帰定理 (recurrence theorem) 155
開球 (open ball) 37, 40
開近傍 (open neighborhood) 57
開写像 (open mapping) 63
開集合 (open set) 40, 56
開集合系 (system of open sets) 40, 56
開集合の公理 (axiom of open sets) 41, 56
外点 (exterior point) 47, 60
開被覆 (open cover, open covering) 123
外部 (exterior) 47, 60
開部分集合 (open subset) 40, 56
下界 (lower bound) 230, 240
下極限 (inferior limit) 243
拡張 (extension) 225
各点収束 (pointwise convergence) 81, 149
下限 (infimum)
　位相の— 80
　実数の部分集合の— 240
　順序集合における— 230
可算 (countable, enumerable) 232
可算直積距離空間 34
可積分関数の空間 **100, 248, 250**
合併集合 (union) 221
カテゴリー定理 (category theorem) **148, 199**
下半連続 (lower semi-continuous) 103
可分 (separable) 50, 61, 69
加法 (addition) 236, 238
関係 (relation) 228
関数 (function) 223
完全 (perfect) 49, 173
完全正則 (completely regular) 114
完全不連結 (totally disconnected) 172
カントール集合 (Cantor set, Cantor discontinuum) 48, 79, 108, 129, 172
完備 (complete) 188
完備化 (completion) 191

【キ】

基 (位相の—, base) 67
基数 (cardinal number) 232
基底 (位相の—, base) 67
軌道 (orbit, trajectory) 96
軌道空間 (orbit space) 96
帰納的 (順序集合が—, inductive) 230
帰納的定義 (inductive definition) 236
基本開集合 (elementary open set) 76–78
基本近傍系 (fundamental neighborhood system) 64

基本対称式 (elementary symmetric polynomials)　98
基本領域 (fundamental domain)　97
基本列 (fundamental sequence)　188, 244
逆写像 (inverse mapping)　225
逆数 (inverse)　69, 239
逆像 (inverse image)　224
吸収律 (absorption law)　221
級数 (series)　245
球面 (sphere)　8, 28, 87, 90, 99, 129, 169, 175, 181
強位相 (数列空間の—, strong topology)　82
境界 (frontier, boundary)　46, 60
境界点 (frontier point, boundary point)　46, 59
共通部分 (intersection)　221, 227
極限 (limit)
　関数値の—　13
　数列の—　242
　点列の—　10
極限点 (limit point)　10
極座標 (polar coordinate)　89, 139
局所弧状連結 (locally arcwise connected)　177
局所コンパクト (locally compact)　145
局所定値 (locally constant)　166
局所有限 (locally finite)　150
曲線 (curve)　74
極大元 (maximal element)　230
曲面 (surface)　94
距離 (metric)　2
距離 (distance)
　点と部分集合の—　107
　二点間の—　2
　二つの部分集合の—　121, 163
距離化定理 (metrization theorem)　119
距離関数 (distance function)　2, 15, 30
距離空間 (metric space)　2
距離の公理　2
近傍 (neighborhood)　37, 40, 57
近傍系 (neighborhood system)　38, 57
近傍系の公理 (axiom of neighborhoods)　58

【ク】

空間 (space)　2, 56
空集合 (empty set, void set)　220
区間 (interval)　26, 38, 43, 45, 124, 168, 241
クラインの壺 (Klein bottle)　92, 104, 132
クラトウスキの公理　60
グラフ (graph)　226
クルル位相 (Krull topology)　102
クロネッカーのデルタ (Kronecker's delta)　21

【ケ】

結合律 (associative law)　221, 227, 234, 237
元 (element)　219
原像　224
減法 (subtraction)　238

【コ】

コーシー-シュワルツの不等式　4, 246
コーシーの積分定理　182
コーシーの判定法　188, 244
コーシー列 (Cauchy sequence)　188, 244
交換律 (commutative law)　221, 234, 237
広義一様収束 (uniform convergence in wider sense)　207
後者 (successor)　235
合成写像 (composed mapping)　14, 62, 225
交代級数 (alternating series)　217
恒等写像 (identity mapping)　225
弧状連結 (arcwise connected, path connected)　175
　—成分 (— component)　177
弧長空間 (length space)　8
コッホ曲線 (Koch curve)　214
細かい (位相が—, fine)　80
孤立点 (isolated point)　47, 61
コンパクト (compact)　123
コンパクト化 (compactification)　156

コンパクト開位相 (compact-open topology) 208
コンパクト不変性　131

【サ】

差 (difference)　236, 238, 239
最小元 (minimum element)　229
最大元 (maximum element)　230
最大値の定理　132
細分 (被覆の—, refinement)　150
差集合 (difference set)　222
作用 (群の—, action)　96
ザリスキ位相 (Zariski topology)　57, 63, 68, 73, 110, 121
三角多項式 (tirgonometrical polynomial)　211
三角不等式 (triangle inequality)　1
　距離関数の—　2
　絶対値の—　241
　ノルムの—　5

【シ】

C^r ノルム (C^r norm)　66
C^∞ 位相 (C^∞ topology)　66
σ-コンパクト (σ-compact)　151
指数関数 (exponential function)　192
自然数 (natural number)　235
四則　17
実数 (real number)　239
実数空間　3, 67, 68
　拡張された—　156
実直線 (real line)　3
始点 (initial point)　174
射影 (projection)　225, 227
射影空間 (projective space)　88, 98, 132, 156
射影直線 (projective line)　88
射影平面 (projective plane)　88, 102
弱位相 (weak topology)
　写像族による—　81
　数列空間の—　82
　和空間の—　85
写像 (map, mapping)　223
写像集合　226
周期点 (periodic point)　83
集合 (set)　219
集合族 (family of sets)　226
集積点 (accumulation point, cluster point) 47, 61
収束 (convergence)
　関数値の—　13
　数列の—　242
　点列の—　10, 38, 65
従属する (1 の分割が開被覆に—, subordinated to)　151
終点 (terminal point)　174
縮小写像 (contraction)　198
縮小写像定理 (contraction lemma)　197
種数 (genus)　94, 95
十進法展開 (decimal expansion)　245
シュワルツの不等式　247
準基, 準基底 (位相の—, subbase)　68
準距離関数 (pseudo-distance function)　99
準距離空間 (pseudo-metric space)　99
準コンパクト (quasi-compact)　123
順序 (order)　228
順序関係 (order relation)　228
順序集合 (ordered set)　229
順序対 (ordered pair)　222
順序の公理　229
順像　224
商 (quotient)　239
商位相 (quotient topology)　86
商位相空間 (quotient topological space)　87
上界 (upper bound)　230, 240
上極限 (superior limit)　243
商空間 (quotient space)　87
上限 (supremum)
　位相の—　80

　実数の部分集合の—　240
　順序集合における—　230
商写像 (quotient mapping)　231
商集合 (quotient set)　231
上半平面 (upper half-plane)　9, 22, 157, 189
上半連続 (upper semi-continuous)　103
乗法 (multiplication)　237–239
剰余類 (residue class)　231
触集合 (adherence)　45, 59
触点 (adherent point)　45, 59
除法 (division)　239
真部分集合 (proper subset)　221

【ス】

推移的 (作用が—, transitive)　99, 140
推移律 (transitive law)　221, 229, 230, 232
数学的帰納法 (mathematical induction)　236
数列 (sequence)　242
数列空間　6, 53, 54, 82, 203
ストーン-チェックのコンパクト化　161
ずらし写像 (shift map)　83

【セ】

正 (positive)　238
正規 (normal)　108, 114
制限 (restriction)　225
正項級数 (positive term series)　245
整数 (integer)　238
生成 (generate)
　位相の—　68, 81
　同値関係の—　231
生成的 (部分集合が—, generic)　148
正則 (regular)　113
正値性 (距離関数の—, positivity)　2
成分 (component)　222, 227
　(連結)—　171
整列公理 (axiom of well-ordering)　229
整列集合 (well ordered set)　229
積 (数の—, product)　237
絶対収束 (absolutely converge)　245
絶対値 (absolute value)　241
接着空間 (attaching space)　93
切片 (segment)　229
線形写像 (linear mapping)　15, 16
線形汎関数 (linear functional)　16
全射 (surjection)　225
全順序 (total order)　229
全体集合 (total set)　222
選択公理 (axiom of choice)　136, 228
全単射 (bijection)　225
全有界 (totally bounded)　142

【ソ】

疎 (nowhere dense)　48, 61
像 (image)　223, 224
相対位相 (relative topology)　72
相対開集合 (relative open set)　72
相対コンパクト (relatively compact)　123
双対性 (duality)　61
双対命題 (dual proposition)　61
双連続 (bi-continuous)　14, 63
添え字 (suffix)　226
族 (family)　227
属する (belong)　219
測地線 (geodesic)　8

【タ】

台 (support)　151
第一可算公理 (first countability axiom), 第一可算性　65
第一類 (of first category)　148
対角線論法　233, 235
大小関係　229, 236, 238, 239
対称群 (symmetric group)　98
対称差 (symmetric difference)　23
対称積 (symmetric product)　98
対称律 (symmetric law)　230, 232
　距離関数の—　2

代数 (algebra) 209
代数学の基本定理 133
代数的数 (algebraic number) 234
対等 (equipotent) 232
第二可算公理 (second countability axiom), 第二可算性 69
第二類 (of second category) 148
代表元 (representative) 231
互いに素 (集合が—, mutually disjoint) 227
多角形 (polygon) 26
高々可算 (at most countable) 232
多元環 (algebra) 209
多様体 (manifold) 146, 153
単射 (injection) 225
単調 (数列が—, monotone) 243
単連結 (simply connected) 179

【チ】

値域 (range) 223
チコノフの定理 136
チコノフの分離公理 114
中心 (星型集合の—, center) 175
稠密 (dense) **48, 61**
　至るところ—(everywhere —) 61
　部分集合で— 61
超越数 (transendental number) 234
直積 (集合の—, direct product, cartesian product) **222, 227**
直積位相 (product topology) 76, 77
直積位相空間 (product topological space) 76
直積因子 (direct product factor) 227
直積距離空間 (product metric space) 29
直積空間 (product space) 29, 76, 77
直積写像 (direct product mapping) 225, 227
直積集合 (direct product set) 222, 227
直積の距離 29
直和 (集合の—, direct sum) 221, 227
　位相空間の— 84
直和因子 (direct summand) 227
直和分割 (decomposition, partition) 227
直径 (diameter) 124
直交群 (orthogonal group) 99, 129

【ツ】

対 (pair) 222
ツォルンの補題 (Zorn's lemma) 228, 230
強い (位相が—, strong) 80

【テ】

T_1 109
T_2 110
T_3 112
$T_{3\frac{1}{2}}$ 114
T_4 114
定義域 (domain) 223
定義関数 (defining function) 225
定値写像 (constant mapping) 166, 225
ティーツェの拡張定理 117
ティーツェの第一公理 **107, 114**
テイラー展開 (Taylor expansion) 208
ディリクレ級数 (Dirichlet series) 245
点 (point) 2
添数 (index) 226
添数集合 (indexing set) 226
点列 (point sequence, sequence) 10
点列コンパクト (sequentially compact) 126

【ト】

同位相 (homeomorphic) 14, 63
同一視 (identification) 89
等化位相 (identification topology) 86
等化空間 (identification space) 87, 91
等距離写像 (isometry) 14
同次座標 (homogeneous coordinate) 88
等質空間 (homogeneous space) 96, 140
等質性 (homogeneity) 32, 96
同相 (homeomorphic) 14, 63
同相写像 (homeomorphism) 14, 41, 63

同値 (equivalent)　230
　距離が—　11
　ノルムが—　17
同値関係 (equivalence relation)　230
同値関係の公理　230
等長写像 (isometry)　14
等長変換群 (isometry group)　206
同値類 (equivalence class)　230
同程度連続 (equicontinuous)　205
等比級数 (geometrical series)　245
等方部分群 (isotropy subgroup)　99, 140
特徴関数 (characteristic function)　225
凸 (集合が—, convex)　175, 180
ド・モルガンの法則　222, 227
トーラス (torus)　31, 91, 96, 101, 129

【ナ】

内点 (inner point, interior point)　44, 59
内部 (interior)　44, 59
内包的定義　220
長さ (曲線の—, length)　7
中への同相写像 (into homeomorphism)　74
なめらかな関数の空間　66, 103
軟化作用素 (molifier operator)　216

【ニ，ノ】

ニュートン法 (Newton method)　198

濃度 (power)　232
ノルム (norm)　5, 15
ノルム空間 (normed space)　5, 32, 135, 147
ノルムの単調性　250

【ハ】

配置集合 (configuration set)　226
ハイネ-ボレルの被覆定理　129
ハウスドルフ (Hausdorff)　106, 110
ハウスドルフ距離 (Hausdorff distance)　141, 196
ハウスドルフ空間 (Hausdorff space)　106, 110
ハウスドルフの分離公理　110
パーセヴァルの等式　21
バナッハ空間 (Banach space)　201
パラコンパクト (paracompact)　150
貼り合わせる (attach)　93
半開区間位相　70
反射律 (reflexive law)　229, 230, 232
半順序 (partial order)　229
反対称律 (asymmetric law)　221, 229

【ヒ】

p 次ノルム (p-th norm)
　関数の—　6, 249
　数列の—　53
　ベクトルの—　5
p 進距離 (p-adic distance)　7, 39, 53
p 進整数 (p-adic integer)　194
p 進付値 (p-adic valuation)　7
非可算 (uncountable)　232
抽出し論法 (ディリクレの—)　52, 195
引き戻し (被覆の—, pull-back)　132
非交叉和 (disjoint uinon)　221
左移動 (left translation)　96
等しい (集合が—, equal)　220
被覆 (cover, covering)　123
評価写像 (evaluation map)　81
ヒルベルト立方体 (Hilbert cube)　35
非連結 (disconnected)　165

【フ】

負 (negative)　238
複素 n 次元空間　5
複素数空間　3
複素平面 (complex plane)　3
含まれる (contained)　219, 220
　真に—　221
不動点 (fixed point)　184
部分位相空間 (topological subspace)　72

部分基 (位相の—, subbase)　68
部分距離空間 (metric subspace)　25
部分空間 (subspace)　25, 72
部分集合 (subset)　220
部分代数 (subalgebra)　209
部分点列 (subsequence)　10
部分被覆 (subcover, subcovering)　123
部分列 (subsequence)　10, 242
部分和 (partial sum)　245
普遍集合 (universal set)　222
ブラウアーの不動点定理　184
フーリエ展開 (Fourier expansion)　20
プレコンパクト (precompact)　142
フレシェ空間 (Fréchet space)　109
フレシェの公理　109
分配律 (distributive law)　221, 227, 234, 237
分離公理 (separation axiom)　105
　第一—　109
　第二—　106, 110
　第三—　112
　第四—　108, 114

【へ】

ペアノ曲線 (Peano curve)　213
ペアノの公理 (axiom of Peano)　235
閉 (closed)　42
閉円板 (disk, disc)　27, 129
閉球 (closed ball)　43, 45
平均収束 (mean convergence)　13
閉写像 (closed mapping)　63
閉集合 (closed set)　**42**, **59**
閉集合の公理 (axiom of closed sets)　43, 59
閉集合系 (system of closed sets)　42
閉部分集合 (closed subset)　42, 59
閉包 (closure)　45, 59
閉包作用素 (closure operator)　60
閉包作用素の公理 (axiom of closure operator)　60
べき集合 (power set)　221
ベール空間 (Baire space)　148
ベルンシュタインの定理　233

【ホ】

包含関係　220, 229
包含写像 (inclusion)　225
星型 (star shaped)　175, 180
補集合 (complement)　222
ホップ写像 (Hopf map)　139
ホモトピー (homotopy)　180
ホモトピック (homotopic)　179
ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理　129, 243
本質的上限 (essential supremum)　101, 249

【マ, ミ】

交わらない (disjoint)　221

道 (path)　174
密着位相 (indiscrete topology, trivial topology)　57
密着空間 (indiscrete space)　57, 124
ミンコウスキの不等式　250

【ム, メ】

無限集合 (infinite set)　220
結ぶ (道で—, join)　**174**

メビウスの帯 (Möbius band)　92

【ヤ, ユ】

ヤコビの定理　52

有界 (bounded)
　距離関数が—　12
　距離空間の部分集合が—　124
　実数の部分集合が—　240
　数列が—　243
　線形写像が—　16

優級数 (majorant series)　245
有限交叉性 (finite intersection property)　125
有限集合 (finite set)　220
有限直積集合　222
有限被覆 (finite cover, finite covering)　123
誘導位相 (induced topology)　81, 84, 86
有理数 (rational number)　238
　—の稠密性　241
ユークリッド空間 (Euclidean space)　3, 12, 38, 50, **145**, 150, 160, 171, 184, 188, 201
　無限次元—　86
ユークリッドの距離 (Euclidean distance)　3
ユークリッドのノルム (Euclidean norm)　4
ユニタリ空間 (unitary space)　5

【ヨ】

要素 (element)　219
弱い (位相が—, weak)　80

【リ】

離散位相 (discrete topology)　57
離散距離 (discrete metric)　3
離散距離空間 (discrete metric space)　3, 12, 42
離散空間 (discrete space)　3, 57, 85, 124
リースの定理　144
立体射影 (stereographic projection)　**93, 161**
リプシッツ定数 (Lipschitz constant)　15
リプシッツ連続 (Lipschitz continuous)　15, 130
リーマン球面 (Riemann sphere)　93, 156
リンデレーフ空間 (Lindelöf space)　164

【ル】

類別 (classification)　231
ルベーグ数 (Lebesgue number)　126, 127, 134

【レ】

零ホモトピー (null homotopy)　180
零ホモトピック (null homotopic)　180
レトラクション (retraction)　181
レトラクト (retract)　181
連結 (connected)　**166**
連結成分 (connected component)　171
連結不変性　**168**
連結和 (connected sum)　94
連続 (continuous)　13, 62
　一点で—　14, 38, 62, 64
　定義域で—　14, 41, 62
　部分集合で—　62
連続関数の空間　6, 13, 18, 39, 50, 53, 80, 81, 202
連続性公理 (実数の—)　240
連続の濃度　232

【ワ】

和 (sum)　236
　級数の—　245
和 (集合の—, union, sum)　221, 227
和集合 (union, sum)　221, 227

ギリシャ文字一覧表

A, α	アルファ	N, ν	ニュー
B, β	ベータ	Ξ, ξ	グザイ
Γ, γ	ガンマ	O, o	オミクロン
Δ, δ	デルタ	Π, π, ϖ	パイ
E, ϵ, ε	イプシロン	P, ρ, ϱ	ロー
Z, ζ	ゼータ	Σ, σ, ς	シグマ
H, η	イータ	T, τ	タウ
Θ, θ, ϑ	シータ（テータ）	Υ, υ	ウプシロン
I, ι	イオタ	Φ, ϕ, φ	ファイ
K, κ	カッパ	X, χ	カイ
Λ, λ	ラムダ	Ψ, ψ	プサイ
M, μ	ミュー	Ω, ω	オメガ

ドイツ文字一覧表

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{a}$	アー	$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{n}$	エヌ
$\mathfrak{B}$ $\mathfrak{b}$	ベー	$\mathfrak{O}$ $\mathfrak{o}$	オー
$\mathfrak{C}$ $\mathfrak{c}$	ツェー	$\mathfrak{P}$ $\mathfrak{p}$	ペー
$\mathfrak{D}$ $\mathfrak{d}$	デー	$\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{q}$	クー
$\mathfrak{E}$ $\mathfrak{e}$	エー	$\mathfrak{R}$ $\mathfrak{r}$	エア
$\mathfrak{F}$ $\mathfrak{f}$	エフ	$\mathfrak{S}$ $\mathfrak{s}$	エス
$\mathfrak{G}$ $\mathfrak{g}$	ゲー	$\mathfrak{T}$ $\mathfrak{t}$	テー
$\mathfrak{H}$ $\mathfrak{h}$	ハー	$\mathfrak{U}$ $\mathfrak{u}$	ウー
$\mathfrak{I}$ $\mathfrak{i}$	イー	$\mathfrak{V}$ $\mathfrak{v}$	ファウ
$\mathfrak{J}$ $\mathfrak{j}$	ヨット	$\mathfrak{W}$ $\mathfrak{w}$	ヴェー
$\mathfrak{K}$ $\mathfrak{k}$	カー	$\mathfrak{X}$ $\mathfrak{x}$	イクス
$\mathfrak{L}$ $\mathfrak{l}$	エル	$\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{y}$	ユプシロン
$\mathfrak{M}$ $\mathfrak{m}$	エム	$\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{z}$	ツェット

著者略歴

矢野公一（やの こういち）

1978年　東京大学大学院理学系研究科修士課程修了
現　在　青山学院大学理工学部教授
　　　　理学博士

共立講座 21世紀の数学
第4巻（全27巻）
距離空間と位相構造

1997年9月25日　初版1刷発行
2005年9月15日　初版4刷発行

検印廃止
NDC 415.2
ISBN 4-320-01556-8

著　者　矢野公一　ⓒ 1997
発行者　南條光章
発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向4-6-19
電話　03-3947-2511（代表）
〒112-8700／振替　00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂
製　本　中條製本工場

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan